Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. C. Goetz

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 2 - Lösungen

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils die Bilder unter den jeweiligen Abbildungen. Skizzieren Sie die Bilder, oder beschreiben Sie diese mit Worten.

(a)
$$D \;=\; \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; 1 \le |z + \mathrm{i}| \le 2, \mathrm{Re}(z) \ge 0,\; \mathrm{Im}(z) \le -1\},$$

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{(z+\mathrm{i})^2}{1+\mathrm{i}}.$$

(b) (*alte Klausuraufgabe, 5 Punkte*)
$$R \;=\; \left\{ z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \;\mid\; |x| \le \frac{\ln(2)}{\pi},\; |y| \le \frac{1}{2} \right\},$$

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cdot \mathrm{e}^{\pi z}.$$

(c)
$$V \;=\; \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \;\mid\; 0 < x \le 1,\; 0 < y \le 1,\; x^2 + y^2 \le 1\},$$

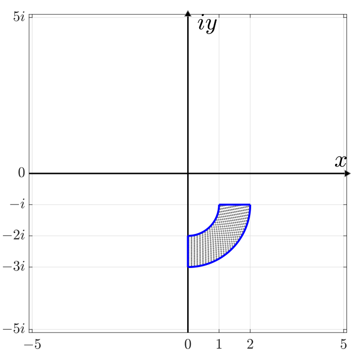
$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z}.$$

Lösung.

(a)

Die Menge D ist das untere rechte Viertel eines Kreisrings mit Mittelpunkte $z_0 = -\mathrm{i}$, Innenradius 1 und Außenradius 2.

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\mid\; z = -\mathrm{i} + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\; 1 \le r \le 2,\; \varphi \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right] \right\}$$



D

Wir zerlegen f in die Komposition

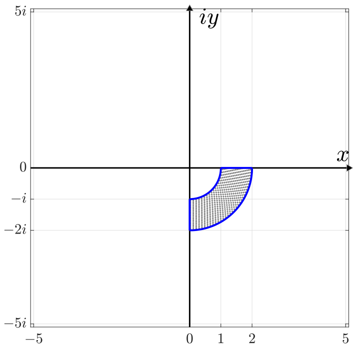
$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1,$$

mit

$$u = f_1(z) = z+i, \quad v = f_2(u) = u^2, \quad w = f_3(v) = \frac{v}{1+i}.$$

Dann verschiebt f_1 in Richtung i und verschiebt daher den Mittelpunkt des Viertelkreises auf 0.

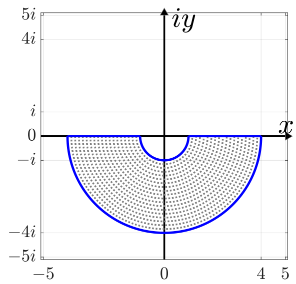
$$f_1(D) = \left\{ u \in \mathbb{C} \;\middle|\; u = re^{\mathrm{i}\varphi},\ 1 \le r \le 2,\ \varphi \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \right\}$$



$f_1(D)$

Danach wenden wir f_2. Quadrieren einer komplexen Zahl bedeutet den Radius quadrieren und den Winkel verdoppeln. Wir erhalten also einen halben Kreisring mit Innenradius 1 und Außenradius 4, mit Winkeln zwischen $-\pi$ und 0.

$$f_2(f_1(D)) = \left\{ v \in \mathbb{C} \;\middle|\; v = se^{\mathrm{i}\psi},\ 1 \le s \le 4,\ \psi\, [-\pi, 0] \right\}$$



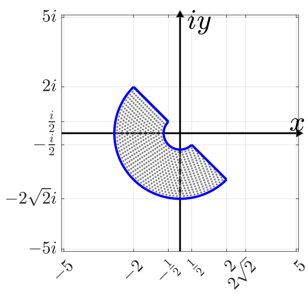
$f_2(f_1(D))$

Schließlich wenden wir f_3. Wir schreiben

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

D.h., wir multiplizieren die Radien mit $1/\sqrt{2}$ und rotieren um $-\pi/4$. Es ergibt sich ein halber Kreisring mit Innenradius $1/\sqrt{2}$ und Außenradius $2\sqrt{2}$, mit Winkeln zwischen $-5\pi/4$ und $-\pi/4$.

$$f(D) = \left\{ w \in \mathbb{C} \;\middle|\; w = te^{\mathrm{i}\theta},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \le t \le 2\sqrt{2},\ \theta \in \left[-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right] \right\}$$



$f(D) = f_3(f_2(f_1(D)))$

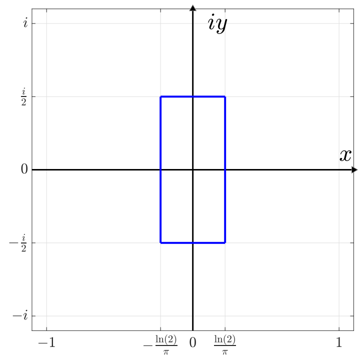
(b)

Die Menge R ist ein Rechteck. Wir zerlegen f in die Komposition

$$f = f_2 \circ f_1,$$

mit

$$u = f_1(z) = \mathrm{e}^{\pi z}, \quad w = f_2(u) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cdot u.$$



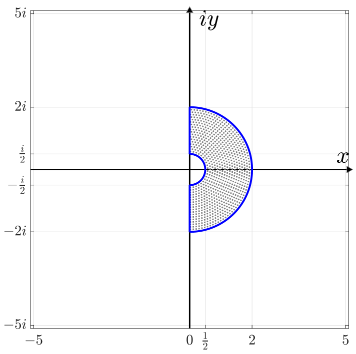
R

Für $z = x + \mathrm{i}y \in R$ gilt

$$w \;=\; f_1(z) \;=\; \mathrm{e}^{\pi(x+\mathrm{i}y)} \;=\; \mathrm{e}^{\pi x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi y}.$$

Mit $x \in [-\frac{\ln(2)}{\pi}, \frac{\ln(2)}{\pi}]$ und $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, erhalten wir $u = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ mit $s = \mathrm{e}^{\pi x}$ und $\theta = \pi y$, wobei

$$s \in [\mathrm{e}^{-\ln(2)}, \mathrm{e}^{\ln(2)}] \;=\; \left[\frac{1}{2}, 2\right], \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$



$f_1(R)$

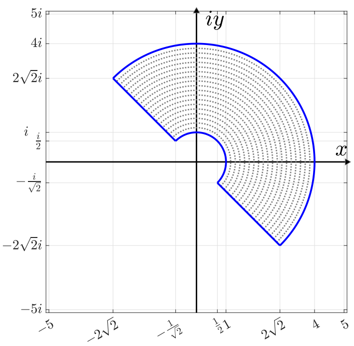
Wir erhalten einen halben Kreisring mit Innenradius $1/2$, Außenradius 2 und Winkeln zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$.

Schließlich führt $w = f_2(u)$ eine Streckung um den Faktor 2 und eine Drehung um $\pi/4$ durch.
Für $u \in f_1(R)$ erhalten wir

$$w \;=\; f_2(u) \;=\; 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cdot s\mathrm{e}^{\theta} \;=\; 2s\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\frac{\pi}{4})} \;=\; r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

mit

$$r = 2s \in [1, 4], \qquad \varphi = \theta + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$



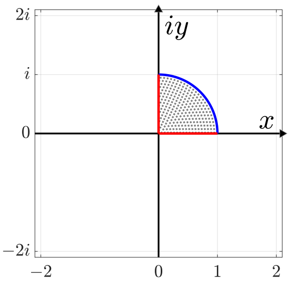
$f(R) = f_2(f_1(R))$

Wir erhalten einen halben Kreisring mit Innenradius 1, Außenradius 4 und Winkeln zwischen $-\pi/4$ und $3\pi/4$.

(c)

Die Menge V ist das obere rechte Viertel der Einheitskreisscheibe, ohne die Achsen. Wir schreiben

$$V = \left\{ z = re^{i\varphi} \;\middle|\; r \in (0,1],\ \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$



V

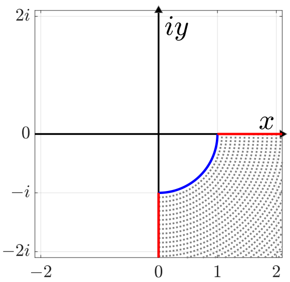
Für $z = re^{i\varphi}$ erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = s\mathrm{e}^{i\theta}.$$

mit

$$s = \frac{1}{r} \in [1, \infty), \qquad \theta = -\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Wir erhalten also den unteren rechten Quadranten, ohne das Innere der Einheitskreisscheibe und ohne die Achsen.



$f(V)$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen.

(a) (*alte Klausuraufgabe, 3 Punkte*) $\quad 2\mathrm{e}^{3z} - \dfrac{\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}{\mathrm{e}^z} = 0,$

(b) $z^4 = 8(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\,,$

Lösung:

(a) Es gilt

$$2\mathrm{e}^{3z} - \frac{\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}{\mathrm{e}^z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{4z} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}).$$

Für $w := \mathrm{e}^{4z}$ soll dann gelten

$$w \;=\; \mathrm{e}^{4z} \;=\; \mathrm{e}^{4(x+\mathrm{i}y)} \;=\; \mathrm{e}^{4x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}4y} \;\stackrel{!}{=}\; \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}).$$

Also:

$$|w| \;=\; |e^{4x}\cdot e^{i4y}| \;=\; e^{4x} \;=\; \left|\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right| \;=\; \left|\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$$
$$\Leftrightarrow \quad 4x \;=\; \ln(1) \quad \Leftrightarrow \quad x \;=\; 0.$$

Damit bleibt:

$$e^{i4y} \;=\; \left|\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right| \quad \Leftrightarrow \quad \arg\left(e^{i4y}\right) \;=\; \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad 4y \;=\; \frac{\pi}{4}+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad y \;=\; \frac{\pi}{16}+\frac{k}{2}\pi, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

(b) Wir haben

$$z^4 \;=\; 8(1+i\sqrt{3}) \quad \Leftrightarrow \quad |z^4| \;=\; |z|^4 \;=\; \sqrt{8^2+3\cdot 8^2} \;=\; \sqrt{4\cdot 8^2} \;=\; 16$$
$$\Leftrightarrow \quad |z| \;=\; 2.$$

In Polarkoordinaten, $z=re^{i\varphi}$, folgt dann

$$z^4 \;=\; r^4e^{i4\varphi} \;=\; 16e^{i4\varphi} \;=\; 16\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \;=\; 16e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Daraus folgt

$$4\varphi \;=\; \frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \;=\; \frac{\pi}{12}+\frac{k}{2}\pi.$$

Wir haben also vier Lösungen, jeweils mit Radius 2 und Winkeln $\{\frac{1}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi\}$.