Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2025**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. C. Goetz

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 1 - Lösungen

Aufgabe 1: Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 2 + 3\mathrm{i}, \qquad z_2 = -4 + 5\mathrm{i}.$$

Berechnen Sie in *kartesischer Darstellung*:

(a) $z_1 + z_2\,, \quad |z_1 + z_2|\,, \quad 2z_1 - 3\mathrm{i}z_2\,, \quad 2\bar{z}_1 - 3\mathrm{i}\bar{z}_2\,,$

(b) $z_1 \cdot z_2\,, \quad \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2\,, \quad z_1^2 \cdot z_2^2\,, \quad \mathrm{Re}(z_1^2) \cdot \mathrm{Im}(z_2^2)\,,$

(c) $\dfrac{z_1}{z_2}\,, \quad \dfrac{\mathrm{Im}(z_1)}{\mathrm{Re}(z_2)}\,.$

Lösung: Wir rechnen direkt nach:

(a) $z_1 + z_2 = 2 + 3\mathrm{i} + (-4 + 5\mathrm{i}) = -2 + 8\mathrm{i}\,,$

$|z_1 + z_2| = |-2 + 8\mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68}\,,$

$2z_1 - 3\mathrm{i}z_2 = 2(2 + 3\mathrm{i}) - 3\mathrm{i}(-4 + 5\mathrm{i}) = 19 + 18\mathrm{i}\,,$

$2\bar{z}_1 - 3\mathrm{i}\bar{z}_2 = 2(2 - 3\mathrm{i}) - 3\mathrm{i}(-4 - 5\mathrm{i}) = -11 + 6\mathrm{i}$

(b) $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3\mathrm{i})(-4 + 5\mathrm{i}) = -23 - 2\mathrm{i}\,,$

$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2} = -23 + 2\mathrm{i}\,,$

$z_1^2 \cdot z_2^2 = (2 + 3\mathrm{i})^2(-4 + 5\mathrm{i})^2 = (-5 + 12\mathrm{i})(-9 - 40\mathrm{i}) = 525 + 92\mathrm{i}\,,$

$\mathrm{Re}(z_1^2) \cdot \mathrm{Im}(z_2^2) = -5 \cdot (-40) = 200\,,$

(c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2 + 3\mathrm{i}}{-4 + 5\mathrm{i}} = \dfrac{(2 + 3\mathrm{i})(-4 - 5\mathrm{i})}{(-4 + 5\mathrm{i})(-4 - 5\mathrm{i})} = \dfrac{7}{41} - \dfrac{22}{41}\mathrm{i}$

$\dfrac{\mathrm{Im}(z_1)}{\mathrm{Re}(z_2)} = -\dfrac{3}{4}$

Aufgabe 2: Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \qquad z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, \qquad z_3 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, \qquad z_4 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

(a) Skizzieren Sie die Lage dieser Punkte in der komplexen Ebene und geben Sie die zugehörige Darstellung in *Polarkoordinaten* ($z = re^{i\varphi}$) an.

(b) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_4$ und z_1^7.

(c) Berechnen Sie $\dfrac{z_1^2 \cdot z_2}{z_3 \cdot \bar{z_4}}$.

Lösung:

(a) In der Darstellung $z_k = r_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}$ gilt für die Radien jeweils:

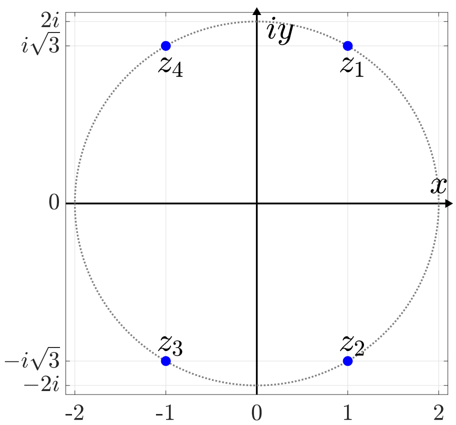
$$r_k = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Die Winkel berechnen wir durch:

$$\begin{array}{llcrcl}
x_1 = 1 > 0, & y_1 = \sqrt{3} > 0 & \Rightarrow & \varphi_1 & = & \arctan(\sqrt{3}) \;=\; \frac{\pi}{3}, \\
x_2 = 1 > 0, & y_2 = -\sqrt{3} < 0 & \Rightarrow & \varphi_2 & = & \arctan(-\sqrt{3}) \;=\; -\frac{\pi}{3}, \\
x_3 = -1 < 0, & y_3 = -\sqrt{3} < 0 & \Rightarrow & \varphi_3 & = & \arctan(\sqrt{3}) - \pi \;=\; -\frac{2\pi}{3}, \\
x_4 = -1 < 0, & y_4 = \sqrt{3} > 0 & \Rightarrow & \varphi_4 & = & \arctan(-\sqrt{3}) + \pi \;=\; \frac{2\pi}{3}.
\end{array}$$

Damit ergibt sich

$$z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}, \qquad z_2 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}},$$
$$z_3 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}, \qquad z_4 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$



(b) Mit den Rechenregeln in Polarkoordinaten erhalten wir

$$z_1 \cdot z_4 \;=\; 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \cdot 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \;=\; (2 \cdot 2) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} \;=\; 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \;=\; -4,$$

sowie

$$z_1^7 \;=\; \left(2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)^7 \;=\; 2^7 \cdot \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}\cdot 7} \;=\; 128 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)} \;=\; 128\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

(c) Wir berechnen zuerst Zähler und Nenner getrennt:

$$z_1^2 \cdot z_2 \;=\; \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2 \cdot 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \;=\; 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)} \;=\; 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

und

$$z_3 \cdot \bar{z}_4 \;=\; 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \cdot 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \;=\; 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} \;=\; 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

Also gilt

$$\frac{z_1^2 \cdot z_2}{z_3 \cdot \bar{z}_4} \;=\; \frac{8}{4} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)} \;=\; 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \;=\; z_2.$$

Aufgabe 3: Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene oder beschreiben Sie sie durch Worte.

(a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 + 3i| \leq 2\}$,

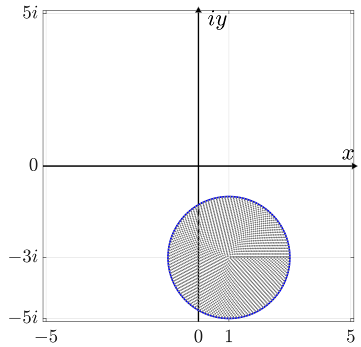
(b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| = |z - 3i|\}$,

(c) $M_3 = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 0\}$,

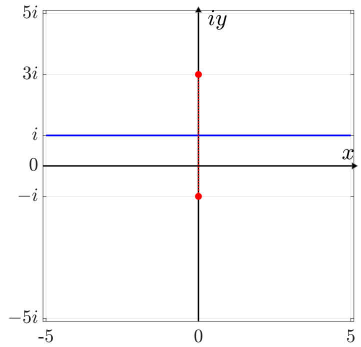
(d) $M_4 = \{z = re^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C} \mid r \in (2,5),\ \varphi \in (-\pi/6, \pi/6)\}$.

Lösung:

(a) M_1 ist ein Kreis mit Mittelpunkt $z_0 = 1 - 3\mathrm{i}$ und Radius 2 (inklusive Rand).



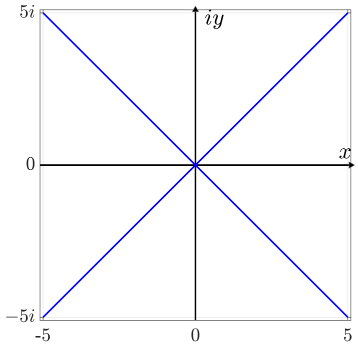
(b) M_2 ist die Menge aller Punkte, die zu $z_1 = -\mathrm{i}$ und zu $z_2 = 3\mathrm{i}$ jeweils den gleichen Abstand haben, d.h. die Gerade, die senkrecht auf der Verbindungsgeraden zwischen z_1 und z_2 steht und durch deren Mittelpunkt verläuft.
Die Verbindungsgerade verläuft entlang der imaginären Achse und ihr Mittelpunkt liegt bei i, d.h. M_2 ist die Gerade parallel zur reellen Achse durch den Punkt i, $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 1\}$.



Mit $z = re^{i\varphi}$, $r \neq 0$ ist $\bar{z} = re^{-\mathrm{i}\varphi}$ und $\dfrac{z}{\bar{z}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$. Also ist $\mathrm{Re}(z/\bar{z}) = \cos(2\varphi)$. Da mit erhalten wir

(c)
$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \cos(2\varphi) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

M_3 besteht also aus den Geraden $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ und $\mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z)$.



(d) M_4 ist ein Segment des Kreisrings mit Innenradius 2 und Außenradius 5, sowie Winkeln zwischen $-\pi/6$ und $\pi/6$ (ohne den Rand).