

**Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Klausur SoSe 25 - Lösungen**

Aufgabe 1. (4 + 1 Punkte)

Es sei

$$M = \left\{ z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r \in [e, e^2], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] \right\},$$

und

$$f(z) = \operatorname{Log} \left(e^{i\pi/4} \cdot z^2 \right),$$

wobei Log den Hauptzweig des natürlichen Logarithmus bezeichnet.

- (a) Bestimmen Sie das Bild $f(M)$ der Menge M unter der Funktion f .
- (b) Skizzieren Sie die Mengen M und $f(M)$ oder beschreiben Sie diese mit Worten.

Lösung.

- (a) Wir schreiben

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

mit

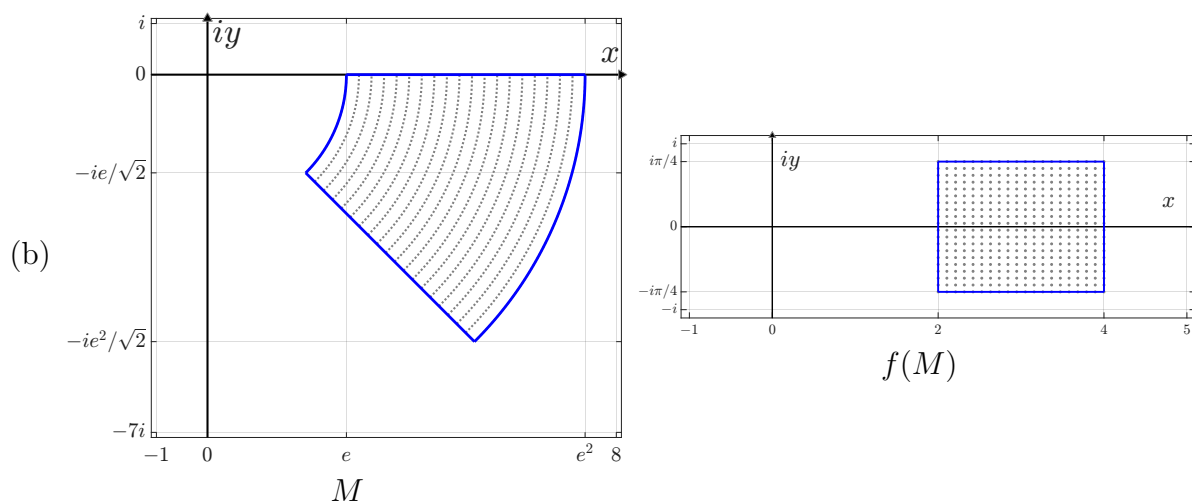
$$u = f_1(z) = z^2, \quad v = f_2(u) = e^{i\pi/4} \cdot u, \quad w = f_3(v) = \operatorname{Log}(v). \quad (1 \text{ P.})$$

Damit ist

$$U = f_1(M) = \left\{ z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r \in [e^2, e^4], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \right\}, \quad (1 \text{ P.})$$

$$V = f_2(U) = \left\{ z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r \in [e^2, e^4], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \right\}, \quad (1 \text{ P.})$$

$$W = f_3(V) = f(M) = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in [2, 4], y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \right\}. \quad (1 \text{ P.})$$



M : Segment des Kreisrings um Null mit Innenradius e , Außenradius e^2 , Winkel zwischen $-\pi/4$ und 0 , inkl. Rand.

$f(M)$: Rechteck mit Kanten von 2 bis 4, bzw. $-\pi/4$ bis $\pi/4$, inkl. Rand.

(1 P.)

Aufgabe 2. (4 + 1 Punkte)

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{2}(x - y)^2 + i \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - xy \right).$$

- (a) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen f komplex differenzierbar ist.
 (b) Ist f in $z_0 = 0$ konform?

Lösung.

- (a) Mit

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^2, \quad v(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^2 - xy \right)$$

gilt

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= x - y, & u_y(x, y) &= y - x, \\ v_x(x, y) &= x - y, & v_y(x, y) &= -x. \end{aligned} \tag{2 P.}$$

Aus den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen ergibt sich

$$u_x(x, y) \stackrel{!}{=} v_y(x, y) \Rightarrow x - y = -x \Rightarrow y = 2x. \tag{1 P.}$$

Die zweite Gleichung,

$$-u_y(x, y) = x - y = v_x(x, y),$$

ist für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Somit ist f differenzierbar in allen Punkten der Form $z = \alpha(1 + 2i)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. (1 P.)

- (b) Da u, v auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar sind, müsste im Falle der Konformität $f'(0) \neq 0$ gelten. Aber es ist

$$f'(0) = u_x(0, 0) + i v_x(0, 0) = 0,$$

also ist f in $z_0 = 0$ nicht konform. (1 P.)

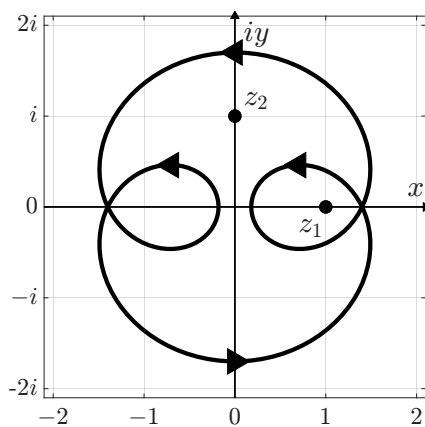
Aufgabe 3. (3 + 2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

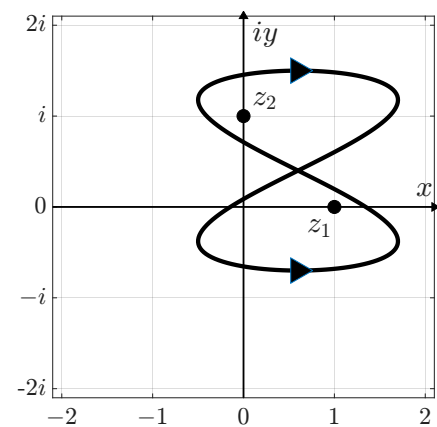
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-i)}.$$

- (a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f . Berechnen Sie jeweils die zugehörigen Residuen.
- (b) Im Folgenden sind jeweils geschlossene Kurven Γ skizziert. Wir nehmen an, dass diese einmal durchlaufen werden und die Pfeile die Orientierung der Kurven anzeigen.

Bestimmen Sie für beide Kurven jeweils $\int_{\Gamma} f(z) \, dz$.



(1)



(2)

Lösung.

- (a) Die isolierten Singularitäten liegen bei $z_1 = 1$ und bei $z_2 = i$. Beide sind einfache Polstellen von f . (1 P.)

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, 1) &= \left. \frac{1}{z-i} \right|_{z=1} = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2}(1+i), \\ \operatorname{Res}(f, i) &= \left. \frac{1}{z-1} \right|_{z=i} = \frac{1}{i-1} = -\frac{1}{2}(1+i).\end{aligned}$$

(2 P.)

- (b) Die Kurve in (1) umläuft $z_1 = 1$ zwei mal positiv und $z_2 = i$ ein mal positiv. Aus dem Residuensatz folgt:

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot (2\operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, i)) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2}(1+i) = \pi(-1+i). \quad (1 \text{ P.})$$

Die Kurve in (2) umläuft $z_1 = 1$ ein mal positiv und $z_2 = i$ ein mal negativ. Aus dem Residuensatz folgt:

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot (\operatorname{Res}(f, 1) - \operatorname{Res}(f, i)) = 2\pi i \cdot (1+i) = 2\pi(-1+i). \quad (1 \text{ P.})$$

Aufgabe 4. (2 + 1 + 2 Punkte)

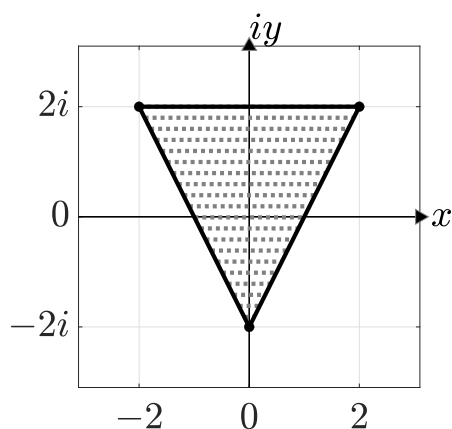
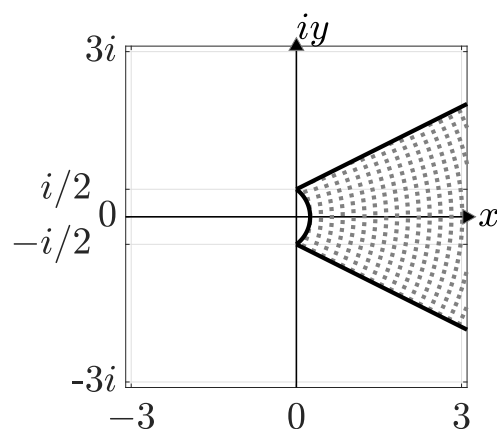
- (a) Bestimmen Sie die Möbius-Transformation
- $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$
- mit

$$T(-2i) = \infty, \quad T(-i) = 4, \quad T(3i) = 0.$$

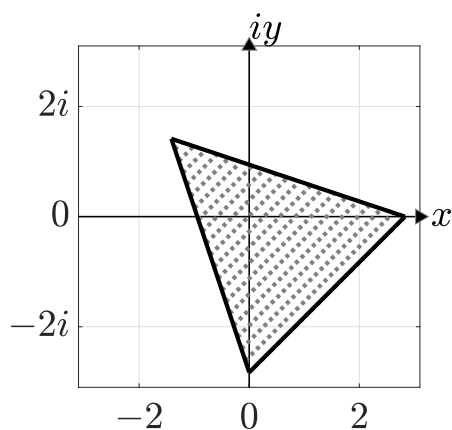
- (b) Bestimmen Sie das Bild der imaginären Achse unter
- T
- .

- (c) Sei
- M
- das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten
- $z_0 = -2i$
- ,
- $z_1 = -2 + 2i$
- ,
- $z_2 = 2 + 2i$
- (siehe Abbildungen unten).

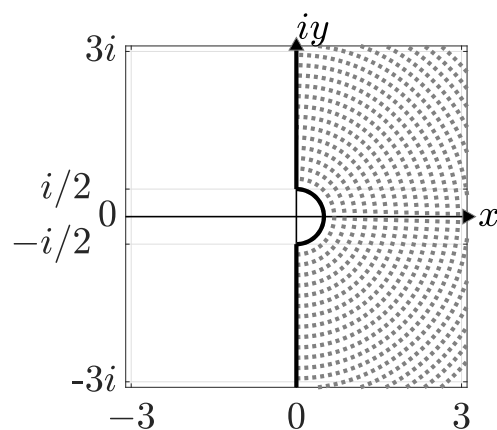
Welche der folgenden Abbildungen zeigt das Bild von M unter T ?
Begründen Sie Ihre Antwort.

 M 

(1)



(2)



(3)

Lösung.

- (a) Wir kennen die Nullstelle und die Polstelle von T , d.h. wir können den Ansatz

$$T(z) = \alpha \cdot \frac{z - 3i}{z + 2i}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

verwenden.

(1 P.)

Aus der verbleibenden Bedingungen erhalten wir

$$T(-i) = \alpha \cdot \frac{-i - 3i}{-i + 2i} = \alpha \cdot \frac{-4i}{i} = \alpha \cdot (-4) \stackrel{!}{=} 4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1,$$

und somit $T(z) = \frac{3i - z}{2i + z}$. (1 P.)

- (b) Da $-d/c = -2i \in i\mathbb{R}$ gilt, ist das Bild von $i\mathbb{R}$ eine Gerade. Es ist $T(-i) = 4 \in \mathbb{R}$ und $T(3i) = 0 \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $T(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. (1 P.)

- (c) Die Gerade durch z_1 und z_2 geht nicht durch $-2i$, ihr Bild ist also ein Kreis. Das Bild des Dreiecks kann also nicht durch drei Geraden beschränkt sein und Abbildung (2) scheidet aus.

Alternativ: Der Punkt $-2i$ wird auf ∞ , abgebildet. Der Bildbereich kann also nicht beschränkt sein. (1 P.)

In z_1 und z_2 schneiden sich die Kanten des Dreiecks jeweils mit einem Winkel kleiner $\pi/2$. Da Möbius-Transformationen winkeltreu sind, scheidet Abbildung (3) aus, denn dort treten nur Schnittwinkel $\pi/2$ auf. (1 P.)

Die korrekte Abbildung ist also (1).