

## Klausur Komplexe Funktionen

27. August 2025

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matr.-Nr.: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Studiengang: 

AIW	CI	ET	GES	IIW / IN	MB	MTB / MEC	SB	
-----	----	----	-----	----------	----	-----------	----	--

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)
----------------

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		

$\Sigma =$
------------

**Aufgabe 1.** (5 Punkte)

Es sei

$$M = \left\{ z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r \in [e, e^2], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] \right\}$$

und

$$f(z) = \operatorname{Log} (e^{i\pi/4} \cdot z^2),$$

wobei  $\operatorname{Log}$  den Hauptzweig des natürlichen Logarithmus bezeichnet.

- (a) Bestimmen Sie das Bild  $f(M)$  der Menge  $M$  unter der Funktion  $f$ .
- (b) Skizzieren Sie die Mengen  $M$  und  $f(M)$ , oder beschreiben Sie diese mit Worten.



**Aufgabe 2.** (5 Punkte)

Für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{2}(x - y)^2 + i \cdot \left( \frac{1}{2}x^2 - xy \right).$$

- (a) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen  $f$  komplex differenzierbar ist.
- (b) Ist  $f$  in  $z_0 = 0$  konform?



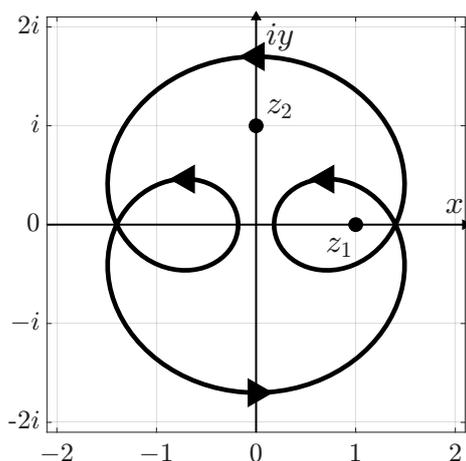
**Aufgabe 3.** (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

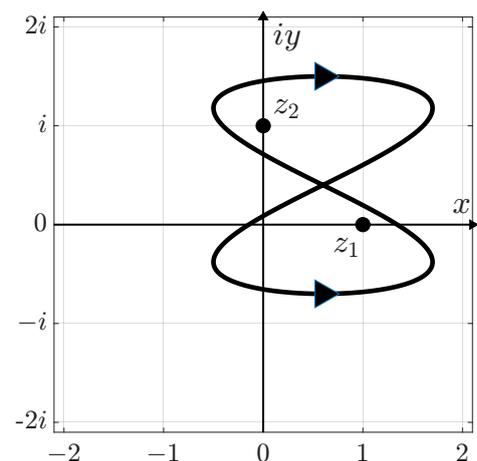
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-i)}.$$

- (a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von  $f$ . Berechnen Sie jeweils die zugehörigen Residuen.
- (b) Im Folgenden sind jeweils geschlossene Kurven  $\Gamma$  skizziert. Wir nehmen an, dass diese einmal durchlaufen werden und die Pfeile die Orientierung der Kurven anzeigen.

Bestimmen Sie für beide Kurven jeweils  $\int_{\Gamma} f(z) dz$ .



(1)



(2)



**Aufgabe 4.** (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Möbius-Transformation  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit

$$T(-2i) = \infty, \quad T(-i) = 4, \quad T(3i) = 0.$$

(b) Bestimmen Sie das Bild der imaginären Achse unter  $T$ .

(c) Sei  $M$  das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten  $z_0 = -2i$ ,  $z_1 = -2 + 2i$ ,  $z_2 = 2 + 2i$  (siehe Abbildungen unten).

Welche der folgenden Abbildungen zeigt das Bild von  $M$  unter  $T$ ?  
Begründen Sie Ihre Antwort.

