Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier,
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. R. Goetz

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7: Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils die isolierten Singularitäten an und klassifizieren Sie diese.

$$f(z) = \frac{2z^3+3z^2+2z+1}{z^3+z^4}\ ,\quad g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}\ ,$$
$$h(z) = \frac{1}{z^2+2z+2} \quad \text{und} \quad s(z) = \frac{\sin(z)}{z\,(z^2+1)}\ .$$

b) Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten aus Teil a).

Lösung:

a) $f:\ z_0 = 0$: Pol 3. Ordnung, $z_1 = -1$ hebbar.

$g:\ z_k = k,\ k = 1,2,3,4$: Pole 1. Ordnung.

$h:\ z_{1,2} = -1 \pm i$: Pole 1. Ordnung.

$s:\ z_{1,2} = \pm i$: Da $\sin(\pm i) \neq 0$, sind z_1 und z_2 einfache Pole.

Für $z_0 = 0$ rechnet man:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{\sin(z)}{z^2+1}}_{q(z)\ \text{analytisch nahe 0}} = \frac{1}{z} \cdot [q(0) + q'(0)(z-0) + \cdots]$$
$$= \frac{1}{z} \cdot \left[0 + z \cdot q'(0) + z^2 \cdot \frac{q''(0)}{2} + \cdots\right].$$

Damit liegt in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität vor.

b) $$Res(f;-1) = \left.\frac{2z^3+3z^2+2z+1}{z^3}\right|_{z=-1} = 0\,.$$

$$Res\,(f;0) = \frac{1}{2!}\left(\frac{2z^3+3z^2+2z+1}{1+z}\right)''_{z=0} = \frac{1}{2!}\,(2z^2+z+1)''_{z=0} = 2\,.$$

$$Res(g;1) = \left.\frac{1}{(z-2)(z-3)(z-4)}\right|_{z=1} = -\tfrac{1}{6}\,.$$

$$Res(g;2) = \left.\frac{1}{(z-1)(z-3)(z-4)}\right|_{z=2} = +\tfrac{1}{2}\,.$$

$$Res(g;3) \;=\; \left.\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-4)}\right|_{z=3} \;=\; -\tfrac{1}{2}\,.$$

$$Res(g;4) \;=\; \left.\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\right|_{z=4} \;=\; +\tfrac{1}{6}\,.$$

$$Res(h;-1+i) \;=\; \left.\frac{1}{(z^2+2z+2)'}\right|_{z=-1+i} \;=\; \frac{1}{2(-1+i+1)} \;=\; -\tfrac{i}{2}\,.$$

$$Res(h;-1-i) \;=\; \left.\frac{1}{(z^2+2z+2)'}\right|_{z=-1-i} \;=\; \tfrac{1}{2(-1-i+1)} \;=\; +\tfrac{i}{2}\,.$$

$$Res(s;0) = 0\,.$$

$$Res(s;i) = \lim_{z\to i} \frac{\sin(z)}{z\,(z+i)} \;=\; -\frac{\sin(i)}{2}\;.$$

$$Res(s;-i) = \lim_{z\to -i} \frac{\sin(z)}{z\,(z-i)} \;=\; \frac{\sin(i)}{2}\;.$$

Aufgabe 2:

f, s, h seien die Funktionen aus Aufgabe 1.

a) Geben Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von h an.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die Integrale

$$\int_{|z|=\pi/2} f(z)dz\,,$$

$$\int_{|z|=2} h(z)dz\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} h(z)dz\ ,$$

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} s(z)dz\,, \qquad \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} s(z)dz\ .$$

Die Kreise sollen einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

Lösung:

a) $$h(z) = \frac{Res(h;-1-i)}{z-(-1-i)} + \frac{Res(h;-1+i)}{z-(-1+i)} = \frac{\frac{i}{2}}{z+1+i} - \frac{\frac{i}{2}}{z+1-i}\,.$$

b) $$\int_{|z|=\pi/2} f(z)dz \;=\; 2\pi i(Res(f;0) + Res(f;-1)) = 4\pi i\,.$$

$$\int_{|z|=2} h(z)dz \;=\; 2\pi i \cdot (Res(h;-1-i) + Res(h;-1+i) \;=\; 2\pi i\left(\frac{i}{2} - \frac{i}{2}\right) \;=\; 0\,.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(z)dz \;=\; 2\pi i(Res(h;-1+i) \;=\; \pi\,.$$

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} s(z)dz \;=\; 0 \qquad \text{CIS bzw. Residuensatz}\ .$$

$$\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} s(z)dz \;=\; 2\pi i \cdot Res(s;i) = -\pi i \sin(i)\ .$$

Bearbeitungstermine: 08.07.24 - 12.07.24