Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier,
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. R. Goetz

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen.

a) $f(z) = z^3 \cdot \sinh(\frac{1}{z})$,

b) $f(z) = \dfrac{\sin(z) - z}{z^2(\frac{\pi^2}{4} - z^2)}$,

c) $f(z) = \dfrac{\ln(z)}{(z-1)^4}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1:

Hier werden in den Teilen a) und b) die bekannten Reihen von sin bzw. sinh verwendet. Man kann natürlich auch wie in Teil c) bzw. wie in den Präsenzübungen für die Funktion s geschehen, argumentieren.

a) Für $f(z) = z^3 \cdot \sinh(\frac{1}{z}) = z^3 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^{-2k-1}}{(2k+1)!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^{-2k-1}}{(2k-2)!}$

liegt in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität vor.

b)

$$f(z) = \frac{\sin(z) - z}{z^2(\frac{\pi^2}{4} - z^2)} = \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - z)(\frac{\pi}{2} + z)} \cdot \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) - z}{z^2}$$

$$= \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - z)(\frac{\pi}{2} + z)} \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k \dfrac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}{z^2} = \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - z)(\frac{\pi}{2} + z)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!}$$

In $z_0 := 0$ liegt also eine hebbare Singularität vor. Wegen $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) \neq \pm\frac{\pi}{2}$ liegen in $z_{1,2} := \pm\frac{\pi}{2}$ Pole erster Ordnung vor.

c) $f(z) = \dfrac{\ln(z)}{(z-1)^4}$

Zur Berechnung der Taylorentwicklung von $g(z) := \ln(z)$ mit Enwicklungspunkt $z_0 := 1$ rechnet man

$\ln(1) = 0\,,$

$\ln(z)' = \frac{1}{z} \Longrightarrow (\ln(z))'_{z=1} = 1\,.$

Damit lautet die Taylorentwicklung von $g(z) = \ln(z)$ mit $z_0 := 1$

$$T_g(z;1) = \ln(1) + (z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$$

und für $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-1)^4}$ erhält man:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^{n-4}.$$

Es liegt also ein Pol dritter Ordnung vor.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuenkalküls die folgenden Integrale bzw. deren Cauchyschen Hauptwerte. (Vgl. Folien 149-151 Vorlesung)

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+16}\,dx.$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos(\omega x)}{x^2+4}\,dx \qquad \omega > 0.$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin(\omega x)}{x^2+4}\,dx \qquad \omega > 0.$

Lösung:

a) Die Nullstellen der Funktion $z^4+16=0$ sind die vierten Wurzeln aus $16e^{i\pi}$, also

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad z_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}},$$

Nur die ersten beiden liegen in der oberen Halbebene. Damit erhalten wir

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+16}\,dx \;=\; 2\pi i(Res\, f(z_1) + Res\, f(z_2))$$

Für $f(z) := \dfrac{1}{z^4+16}$ gilt

$$Res\, f(z_k) \;=\; \frac{1}{4z_k^3}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{x^4+16}\,dx &= \pi i \frac{1}{32}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{9\pi}{4}}\right)\\ &= \frac{\pi i}{32}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \;=\; \frac{\pi i}{32} 2i\sin(-\frac{\pi}{4})\\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{32}\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos(\omega x)}{x^2+4}\,dx = 0.$

denn der Integrand ist ungerade! Dies ergibt sich auch aus der Rechnung im Teil c).

c)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin(\omega x)}{x^2+4}\,dx \qquad \omega > 0.$$

Die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4}$ hat die isolierten Singularitäten $\pm 2i$. Insbesondere also keine Singularitäten auf der reellen Achse. Es gilt $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. Nur $2i$ liegt in der oberen Halbebene. Nach Vorlesung erhalten wir also

$$\begin{aligned}\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\omega x}}{x^2+4}\,dx &= 2\pi i Res\left(\frac{ze^{i\omega z}}{z^2+4}\right)\Bigg|_{z=2i} \\ &= 2\pi i\left(\frac{2ie^{i\omega 2i}}{2\cdot 2i}\right) = i\pi e^{-2\omega}\end{aligned}$$

und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(\omega x)}{x^2+4}\,dx \;=\; \operatorname{Im}\left(i\pi e^{-2\omega}\right) \;=\; \pi e^{-2\omega}.$$

Bemerkung: Hier ergibt sich auch rechnerisch das Ergebnis aus b) nämlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos(\omega x)}{x^2+4}\,dx \;=\; \operatorname{Re}\left(i\pi e^{-2\omega}\right) \;=\; 0.$$

Abgabetermine: 08.07.24 - 12.07.24