Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier,
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. R. Goetz

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6: Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\oint_{C_1} \frac{e^z}{z}\, dz,$ $\quad C_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad C_1(t) = 2 + e^{it},$

b) $\displaystyle\oint_{C_2} \frac{e^z}{z}\, dz\,,$ $\quad C_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ C_2(t) = 2\,e^{it},$

c) $\displaystyle\oint_{C_2} \frac{\pi e^{iz^2}}{(z-i)^2}\, dz$ $\quad C_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ C_2(t) = 2\,e^{it},$

d) $\displaystyle\oint_{C_3} \frac{z\cos(2z)}{(z-\frac{\pi}{3})^3}\, dz$ $\quad C_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ C_3(t) = 1 + e^{it},$

e) $\displaystyle\oint_{C_4} \frac{z\cos(2z)}{(z-\frac{\pi}{3})^3}\, dz$ $\quad C_4 : [0, 6\pi] \to \mathbb{C},\ C_4(t) = \frac{1}{2}\,e^{2it},$

f) $\displaystyle\oint_{C_5} \frac{z\cos(2z)}{(z-\frac{\pi}{3})^3}\, dz$ $\quad C_5 : [0, 6\pi] \to \mathbb{C},\ C_5(t) = 1 + 2e^{it},$

g) $\displaystyle\oint_{C_6} \frac{1}{z^2+2z+10}\, dz\,,$ $\quad C_6 : [0, 4\pi] \to \mathbb{C},\ C_6(t) = -3i + 3\,e^{-it}.$

h) $\displaystyle\oint_{C_7} \frac{z^2+2}{(z^3-z^2+z-1)}\, dz,$ $\quad C_7 : |z - 0.5| = 1$, einmal mathematisch positiv umlaufen.

Lösung zur Aufgabe 1:

a) Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist $\displaystyle\oint_{C_1} \frac{e^z}{z}\, dz = 0.$

b) Nach der ersten Cauchyschen Integralformel gilt (Voraussetzungen: Siehe Vorlesung)

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0).$$

Also $\displaystyle\oint_{C_2} \frac{e^z}{z}\, dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i$

c) Nach der zweiten Cauchyschen Integralformel gilt (Voraussetzungen: Siehe Vorlesung)

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Also $\displaystyle \oint_{C_2} \frac{\pi e^{iz^2}}{(z-i)^2} = 2\pi i \left(\pi e^{iz^2}\right)'_{z=i} = 2\pi^2 i^2 \cdot 2ie^{i^3} = -4\pi^2 i e^{-i}\,.$

d) Wegen $(z\cos(2z))'' = (-2z\sin(2z)+\cos(2z))' = -4z\cos(2z) - 4\sin(2z)$

erhält man mit der zweiten Cauchyschen Integralformel

$$I_3 := \oint_{C_3} \frac{z\cos(2z)}{(z-\frac{\pi}{3})^3}\,dz = \pi i\,[-4z\cos(2z)-4\sin(2z)]_{z=\frac{\pi}{3}} = 2\pi i(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3})$$

e) Aus dem Cauchy-Integralsatz folgt $\displaystyle \oint_{C_4} \frac{z\cos(2z)}{(z-\frac{\pi}{3})^3}\,dz = 0\,.$

f) C_5 umläuft die Nennernullstelle ebenso wie C_3 in mathematisch positiver Richtung, allerdings drei mal. Daher erhalten wir

$$I_5 := \oint_{C_5} \frac{z\cos(2z)}{(z-\frac{\pi}{3})^3}\,dz = 3I_3 = 2\pi i(\pi - 3\sqrt{3})\,.$$

g) $\displaystyle f(z) = \frac{1}{z^2+2z+10}$

Nennernullstellen: $z^2+2z+10 = (z+1)^2+9 = 0 \iff z_{1,2} = -1 \pm 3i\,.$

$$\oint_{C_6} f(z)dz = \oint_{C_6} \frac{\frac{1}{z-(-1+3i)}}{z-(-1-3i)}\,dz = -2\cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{-1-3i-(-1+3i)} = \frac{2\pi}{3}.$$

h) $\displaystyle \frac{z^2+2}{(z^3-z^2+z-1)} = \frac{z^2+2}{(z^2+1)(z-1)}\,.$

Die Punkte $\pm i$ liegen außerhalb von $|z-0.5| \leq 1$. Also gilt

$$\oint_{|z-0.5|=1} \frac{z^2+2}{(z^3-z^2+z-1)}\,dz = \oint_{|z-0.5|=1} \frac{\frac{z^2+2}{z^2+1}}{(z-1)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1^2+2}{1^2+1}\right) = 3\pi i\,.$$

(Cauchysche Integralformel mit $f(z) = \frac{z^2+2}{z^2+1}$)

Aufgabe 2: Gegeben sind die Funktionsvorschriften:

$$g(z) = \frac{2+3z+z^2}{(z^2+4)(z^2-1)}\,, \qquad f(z) = \frac{1+z}{z^2(z+i)}\,, \qquad \tilde{f}(z) = \frac{\cos(z)-2}{z^2}.$$

a) Wie viele verschiedene Laurent-Reihen gibt es zu g bzw. f bzw. $\tilde{f}$ bei Entwicklung um $z_0 = 0$?

b) Bestimmen Sie diejenigen Laurent-Entwicklungen der Funktionen f und $\tilde{f}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, die in der Umgebung des Punktes $z^* = 2$ gegen $f(2)$ bzw. $\tilde{f}(2)$ konvergiert.

Lösungshinweise:

a) Zu g gibt es drei Laurent-Reihen um Null, und zwar in den Ringen:

$R_1 : 0 < |z| < 1, \qquad R_2 : 1 < |z| < 2, \qquad R_3 : 2 < |z|.$

Zu f gibt es zwei Laurent-Reihen um Null, und zwar in den Ringen:

$R_1 : 0 < |z| < 1, \qquad R_2 : 1 < |z|.$

Zu $\tilde{f}$ gibt es nur eine Laurent-Reihe um Null. Diese konvegiert in der punktierten komplexen Zahlenebene:

$\mathbb{C} \setminus \{0\} : 0 < |z|.$

b) Wir entwickeln für $|z| > 1$:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1+z}{z^2(z+i)} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1+z}{z+i} = \frac{1}{z^2}\cdot\left(1+\frac{1-i}{z+i}\right)\\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1-i}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z+i}\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1-i}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{-i}{z}}\right)\\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1-i}{z^3}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{z^k}\right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-i}{i^k\cdot z^{k+3}}\\
&= z^{-2} + \sum_{k=-\infty}^{-3}(1-i)i^{k+3}z^k
\end{aligned}$$

Für $\tilde{f}$ gilt in der punktierten komplexen Zahlenebene $0 < |z|$:

$$\tilde{f}(z) = \frac{\cos(z)-2}{z^2} = -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k} = -\frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2(k-1)}.$$

Bearbeitungstermine: 24-28.06.2024