**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier,
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. R. Goetz

# Komplexe Funktionen
# für Studierende der Ingenieurwissenschaften
## Blatt 6: Hausaufgaben

**Aufgabe 1)**

a) Es sei $C$ der einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufene Einheitskreis $|z| = 1$.

(i) Berechnen Sie $\displaystyle\int_C \frac{1}{(e^z - i)}\, dz$.

(ii) Für eine auf $\mathbb{C}$ analytische Funktion gelte $|\,f(z)\,| = 4$ überall auf der Kurve $C$ und $f(0) = 4i$. Wie muss dann $f$ aussehen?

b) Sei $C$ eine doppelpunktfreie geschlossene stückweise $C^1$ Kurve. Wann ist das Integral

$$I(C) := \int_C \frac{z}{z^2+1}\, dz$$

definiert?

Welche Werte kann das Integral annehmen, wenn es definiert ist?

**Lösung:**

a) (i) $e^z = i \iff e^x e^{iy} = i \iff x = 0$ und $y = 2k\pi + \pi/2$.
Da $|2k\pi + \pi/2| \geq \pi/2$ ist, ist der Integrand in $|z| \leq 1 < \pi/2$ analytisch. Daher gilt

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{(e^z - i)}\, dz = 0.$$

(ii) Nach Vorlesung (Maximumprinzip) ist $f$ konstant, also $f(z) = 4i$.

b) Das Integral existiert, sofern die Kurve weder durch $i$ noch durch $-i$ geht. Die Kurve ist einfach geschlossen (doppelpunktfrei), also werden die Punkte $i$ und $-i$ nicht mehrmals umlaufen.

Wenn die Kurve positiv orintiert ist, können folgende vier Fälle auftreten:

(i) Keines der Punkte $\pm i$ wird von der Kurve umlaufen. Dann folgt aus dem Cauchy Integralsatz

$$I(C) = 0$$

(ii) Der Punkt $-i$ wird von der Kurve umlaufen, aber nicht der Punkt $i$. Dann gilt

$$I(C) = \int_C \frac{\frac{z}{z-i}}{z+i}\, dz = 2\pi i \left[\frac{z}{z-i}\right]_{z=-i} = 2\pi i\, \frac{-i}{-2i} = \pi i$$

(iii) Der Punkt $i$ wird von der Kurve umlaufen, aber nicht der Punkt $-i$. Dann gilt

$$I(C) = \int_C \frac{\frac{z}{z+i}}{z-i}\, dz = 2\pi i \left[\frac{z}{z+i}\right]_{z=i} = 2\pi i \frac{i}{2i} = \pi i$$

(iv) Beide Punkte werden umlaufen. Dann erhält man mit Hilfe der Partialbruchzerlegung $\dfrac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right)$

$$I(C) = \frac{1}{2}\int_C \frac{1}{z+i}\, dz + \frac{1}{2}\int_C \frac{1}{z-i}\, dz = \frac{1}{2}2\pi i + \frac{1}{2}2\pi i = 2\pi i$$

Bei einer negativ orientierten Kurve erhält man entsprechend die Werte $0$, $-\pi i$, $-2\pi i$.

**Aufgabe 2:** Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils diejenige Laurentreihe zum Entwicklungspunkt $z_0$, die im Punkt $z = -3/2$ gegen $f(-3/2)$ konvergiert.

a) $f(z) = z^3 \cos(\frac{1}{z})$, $\quad z_0 = 0$,

b) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2+z-2}$, $\quad z_0 = 0$,

c) $f(z) = \dfrac{3}{z^2+z-2}$, $\quad z_0 = 1$,

d) $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^3}$, $\quad z_0 = 1+i$.

**Lösungshinweise zur Aufgabe 2:**

a)

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \cos(\frac{1}{z}) \\ &= z^3 \left(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \cdots\right) = \left(z^3 - \frac{z}{2} + \frac{1}{4!z} - \frac{1}{6!z^3} + \cdots\right) \end{aligned}$$

Die Funktion ist analytisch in $0 < |z| < \infty$. Die Laurentreihe ist

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 - \frac{z}{2} + \frac{1}{4!z} - \frac{1}{6!z^3} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2k+3} = \sum_{k=-\infty}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2-2k)!} z^{2k+1} \end{aligned}$$

b)

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^2+z-2} = 1 + \frac{-z+2+1}{(z+2)(z-1)} = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{z-1} - \frac{5}{z+2}\right)$$

Ist überall in $\mathbb{C}$ analytisch außer in den Punkten $z = 1$ und $z = -2$. Wir betrachten die Funktion also auf dem Ring $R_2 \,:\, 1 < |z| < 2$.

Zunächst bestimmen wir die Entwicklungen der einzelnen Terme:

$$|z| > 1 \,:\, \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k,$$

$$|z| < 2 \,:\, \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(\frac{-z}{2})} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{2^k} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^{k+1} z^k$$

Damit erhalten wir die folgende Entwicklungen der Funktion $f$ im Ring $R_2 \; : \; 1 < |z| < 2$:

$$f(z) = 1 + \frac{2}{3}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k + \frac{5}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^{k+1} z^k\right) = \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{2}{3} z^k + \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{3}(-\frac{1}{2})^{k+1} z^k\right)$$

**Alternativ:**

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^2+z-2} = \frac{z^2+1}{(z+2)(z-1)} = \frac{z^2+1}{3}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right)$$

Ist überall in $\mathbb{C}$ analytisch außer in den Punkten $z = 1$ und $z = -2$. Wir betrachten die Funktion also auf dem Ring $R_2 \; : \; 1 < |z| < 2$.

Zunächst bestimmen wir die Entwicklungen der einzelnen Terme:

$$|z| > 1 \; : \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k,$$

$$|z| < 2 \; : \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{-z}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{2^k} = -\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^{k+1} z^k$$

Damit erhalten wir die folgende Entwicklungen der Funktion $f$ im Ring $R_2 \; : \; 1 < |z| < 2$:

$$f(z) = \frac{z^2+1}{3}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^{k+1} z^k\right)$$

Zusammenfassen ergibt

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} z^{k+2} + \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} z^{k+2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} z^k\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2z^k + z^0 + z^1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} z^k + \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} z^k\right] - \frac{1}{2} z^0 + \frac{1}{4} z^1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k + \frac{1}{2} + \frac{5}{4} z + 5\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} z^k\right).
\end{aligned}$$

c) $f(z) = \dfrac{3}{z^2+z-2} = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+2}, \qquad z_0 = 1$

ist überall in $\mathbb{C}$ analytisch außer in den Punkten $z = 1$ und $z = -2$.. Wir betrachten die Funktion also auf dem Ring $R \; : \; 0 < |z-1| < 3$. Hier gilt

$$\tfrac{1}{z+2} = \tfrac{1}{(z-1)+3} = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - (-(z-1)} = \tfrac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (z-1)^k.$$

Und damit

$$f(z) = \tfrac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3}(z-1)^k.$$

d) Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^3}$ hat eine isolierte Singularität in $z_1 = i$. Es gibt eine Laurentreihe im punktierten Kreis $0 < |z - z_0| < 1$ und eine im Ring $1 < |z - z_0|$. Wir entwickeln zunächst $g(z) = \dfrac{1}{z-i}$ im äußeren Ring um $z_0 = 1 + i$.

$$g(z) = \frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-(1+i)+1} = \frac{1}{z-(1+i)} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{1}{z-(1+i)}}$$

$$= \frac{1}{z-(1+i)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z-(1+i)}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \,(z-(1+i))^{-(k+1)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^{k+1} \,(z-(1+i))^k$$

Die gesuchte Reihenentwicklung erhält man nun durch zweimaliges Ableiten:

$$g'(z) = -\frac{1}{(z-i)^2} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^{k+1}\, k\,(z-(1+i))^{k-1}$$

$$g''(z) = 2\frac{1}{(z-i)^3} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^{k+1}\, k(k-1)\,(z-(1+i))^{k-2} \qquad \text{also}$$

$$\frac{1}{(z-i)^3} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^{k+1}\, k(k-1)\,(z-(1+i))^{k-2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{-3} (-1)^{k+1}\,(k+2)(k+1)\,(z-(1+i))^{k}$$

**Abgabetermine:** 06.2024