Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier,
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. R. Goetz

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5: Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale

a) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} |z|\,dz := \int_{C_1} |z|\,dz + \int_{C_2} |z|\,dz,$

C_1 : geradliniger Weg von -1 nach 1,
C_2 : Halbkreis mit Radius 1 um Null, von 1 nach -1 in mathematisch positiver Richtung durchlaufen.

b) $\displaystyle\int_C (1+z)\,dz,$ $\quad C(t) := \cos t + 3i\sin t,\ t \in [-\pi, 0]$ (Halbellipse)

c) $\displaystyle\int_c (\bar{z})^2\,dz,$ $\quad c(t) = 2e^{(-1+i)t},\ t \in [0,\ \pi/4],$

d) $\displaystyle\int_C e^{3z}\,dz,$ $\quad C$: Das Stück der Parabel $\operatorname{Im}(z) = \pi\,(\operatorname{Re}(z))^2$ welches die Punkte Null und $1+i\pi$ verbindet.

Lösungsskizze:

a) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} |z|\,dz \qquad C_1\ : t \mapsto t,\ t \in [-1,1], \quad C_2\ : t \mapsto e^{it},\ t \in [0,\pi]$

$$\int_{C_1} |z|\,dz + \int_{C_2} |z|\,dz = \int_{-1}^{1} |t|dt + \int_0^{\pi} |e^{it}|ie^{it}dt$$

$$= \int_{-1}^{0} -tdt + \int_0^1 tdt + \left[e^{it}\right]_0^{\pi} = \left[t^2\right]_0^1 - 2 = -1$$

b) $\displaystyle\int_C (1+z)\,dz = \int_{C(-\pi)}^{C(0)} (1+z)\,dz = \left[z + \frac{z^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 2$

Natürlich kann man auch $f(c(t))\dot{c}(t)$ einsetzen. Das ist allerdings etwas aufwendiger.

c) $c(t) = 2e^{(-1+i)t}, \quad \dot{c}(t) = 2(-1+i)e^{(-1+i)t}$

$$\int\limits_c (\bar{z})^2\, dz, = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2e^{(-1-i)t})^2 \cdot 2(-1+i)e^{(-1+i)t}\, dt = \; 8(-1+i) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \; e^{(-3-i)t}\, dt$$

$$= 8\frac{-1+i}{-3-i}\left(e^{(-3-i)\frac{\pi}{4}} - e^0\right) = 8\frac{(-1+i)(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}(1-i) - 1\right)$$

$$= \frac{4}{5}(2-4i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}(1-i) - 1\right)$$

d) Die Funktion ist analytisch in $\mathbb{C}$. Der Wert des Integrals hängt nur von Anfangs– und Endpunkt der Kurve ab.

$$\int\limits_C e^{3z}\, dz = \left[\frac{e^{3z}}{3}\right]_0^{1+i\pi} = \frac{1}{3}(-e^3 - 1)\,.$$

Aufgabe 2:

a) In welchem Gebiet ist die Möbiustransformation $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ winkeltreu?

b) Ist es möglich das Gebiet

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1,\ \mathrm{Re}\,(z) > 0,\ \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$$

mittels einer Möbiustransformation auf das Innere eines echten Dreiecks abzubilden? Unter einem echten Dreieck verstehen wir ein Dreieck dessen Eckpunkte im Endlichen liegen.

c) Die Abbildungsvorschrift $f:\ z \to e^{\frac{i\pi}{4}}\bar{z}$ beschreibt eine Drehspiegelung. Offensichtlich verursacht diese keine Längenverzerrungen. Die Größe der Winkel wird ebenfalls erhalten. f ist als Transformation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wo ist f komplex differenzierbar? Wie verträgt sich Ihr Ergebnis mit dem Satz aus Seite 75 der Vorlesung:

Satz: Ist $w = f(z)$ eine konforme Abbildung und als Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so ist $f(z)$ komplex differenzierbar und es gilt $f'(z) \neq 0$.

d) Das Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi},\ -\frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{8},\ 0 < r < 2\}$ soll bijektiv und konform auf das Innere des Einheitskreises transformiert werden. Warum tut es $z \mapsto \left(\dfrac{z}{2}\right)^8$ nicht?

Zusatzaufgabe/Kür: Geben Sie eine bijektive, konforme Abbildung an, die das Gewünschte leistet.

Lösung:

a) Die Möbius Transformation ist analytisch in $\mathbb{C}$ ohne $z = -\dfrac{d}{c}$. Mit Ausnahme dieses Punktes gilt überall $T'(z) \neq 0$. Damit ist die angegebene Möbius Transformation winkeltreu in allen Punkten mit Ausnahme von $z = -\dfrac{d}{c}$.

b) Möbius-Transformationen sind überall winkeltreu außer im Punkt $z = -\dfrac{d}{c}$. Da ein echtes Dreieck erzeugt werden soll, fällt keine „Ecke" des Urbildes mit $z = -\dfrac{d}{c}$ zusammen. In den beiden Ecken $1 + 0 \cdot i$ und $0 + i$ von M_1 schneiden sich die berandenden verallgemeinerten Kreise im Winkel $\pi/2$. Beide rechten Winkel können aber nicht in einem echten Dreieck reproduziert werden.

Alternativ: Der Rand des Gebietes besteht aus Teilen dreier verallgemeinerter Kreise, die keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Damit kann keine Möbius-Transformation alle drei verallgemeinerten Kreise des Randes auf Geraden abbilden. Denn alle Bildgeraden würden sich im unendlich fernen Punkt schneiden!

c) Die Funktion $g:\ z \to \bar{z}$ ist nirgends in $\mathbb{C}$ differenzierbar, denn es ist

$$g(z) = x - iy \implies u_x = 1 \neq -1 = v_y.$$

Damit ist auch f nirgends komplex differenzierbar. Die Abbildung ist aber auch nicht winkeltreu, denn sie erhält zwar die Größe der Winkel aber nicht die Orientierung.

d) Mit $\left(\frac{z}{2}\right)^8$ erhält man nur die längs der negativen reellen Achse aufgeschnittene Kreisscheibe.

Lösungsskizze der Zusatzaufgabe:

1. Schritt: $f_1(z) = \hat{z} = z^4$ *. Der angegebene Achtelkreis wird bijektiv und konform auf einen Halbkreis abgebildet. Der Rand wird nun durch 2 Verallgemeinerte Kreise definiert.*

2. Schritt: *Der Schnitt zweier Verallgemeinerter Kreise wird auf einen Sektor abgebildet, wenn die Schnittpunkte der Verallgemeinerten Kreise (hier:* $16i$ *und* $-16i$ *) auf* 0 *und* ∞ *abgebildet werden. Wir wählen* $\tilde{z} = f_2(\hat{z}) := \dfrac{16i + \hat{z}}{16i - \hat{z}}$ *. Das Bild von* $i\mathbb{R}$ *ist* $\mathbb{R}$ *(Form der Koeffizienten!) und das Bild des Kreises ist eine Gerade, die in* $T(-16i) = 0$ *senkrecht auf* $\mathbb{R}$ *steht (winkeltreue). Also wird der Kreisrand auf die imaginäre Achse abgebildet. Die rechte Hälfte der Kreisscheibe geht wegen* $T(0) = 1$ *und* $T(16) = -i$ *in den 4. Quadranten über.*

3. Schritt: $W = f_3(\tilde{z}) = \tilde{z}^2$ *. Wir verdoppeln den Öffnungswinkel und haben damit den Rand auf einer Geraden, nämlich der reellen Achse .*

4. Schritt: *Im letzten Schritt bilden wir die reelle Achse auf den Einheitskreis und zwar, so dass z. B. der Punkt* $-i$ *in den Mittelpunkt 0 übergeht. Damit erreichen wir, dass die untere Halbebene in das Innere des Einheitskreises abgebildet wird. Die Transformation* $w = f_4(W) := \dfrac{W + i}{W - i}$ *leistet das Gewünschte.*

Insgesamt also

$$f(z) = \frac{\left(\dfrac{16i + z^4}{16i - z^4}\right)^2 + i}{\left(\dfrac{16i + z^4}{16i - z^4}\right)^2 - i}.$$

Bearbeitungstermine: 10.06.24 - 14.06.24