Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier,
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. R. Goetz

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben sei ein hohler, sehr langer Kreiszylinder vom Radius 1. Die obere und die untere Hälfte seien voneinander elektrisch isoliert. Die obere Hälfte befinde sich auf dem Potential $\Phi = 100$ V und die untere Hälfte befinde sich auf dem Potential $\Phi = -100$ V. Bei entsprechender Wahl des Koordinatensystems ergibt sich auf dem Schnitt des Zylinders mit der komplexen Zahlenebene :

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= 100\mathbf{V} \quad \text{für } |z| = |x+iy| = 1\,,\ y > 0, \\ \Phi(z) &= -100\mathbf{V} \quad \text{für } |z| = |x+iy| = 1\,,\ y < 0\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie das Potential und die Feldstärke im Zylinder.

Hinweise : Transformieren Sie den Einheitskreis auf einen Sektor, zum Beispiel auf die rechte Halbebene. Bei vernünftiger Transformation hängen die Randdaten in der Modellebene nur vom Winkel ab. Verwenden Sie zur Lösung in der Differentialgleichung in der Modellebene die Potentialgleichung in Polarkoordinaten

$$\rho^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\,\Psi + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\,\Psi + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\,\Psi = 0$$

unter Berücksichtigung der speziellen Struktur der Randdaten. Schreiben Sie die Lösung in der Modellebene um in kartesische Koordinaten und transformieren Sie zurück.

Lösungsskizze:

Die beiden Randteile haben zwei Schnittpunkte: -1 und 1.

$\longrightarrow$ Erzeuge einen Sektor.

Kreis: mittels Möbius auf eine Gerade transformieren.

Sektor begrenzt durch Gerade: z.B. $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$.

Transformiere -1 und 1 auf Null und ∞ zum Beispiel $T(z) = a\frac{1+z}{1-z}$.

Wähle reelle Koeffizienten: $\mathbb{R}$ bleibt $\mathbb{R}$.

Die Möbiustransformation $T(z) := \dfrac{1+z}{1-z}$ transformiert das Innere des Einheitskreises auf die rechte Halbebene, denn es gilt

$$T(-1) = 0, \quad T(1) = \infty, \quad T(i) = i \quad T(0) = 1\,.$$

In der Modellebene lautet das Problem

$$\begin{aligned} \Delta\Psi(u,v) &= 0\,, & \text{für } u>0\,,\\ \Delta\Psi(0,v) &= 100\,, & \text{für } v>0\,,\\ \Delta\Psi(0,v) &= -100\,, & \text{für } v<0\,. \end{aligned}$$

Wir gehen nicht nur zu Polarkoordinaten über, sondern machen wegen der Struktur der Randdaten den Ansatz $\Psi(\rho,\alpha)=\tilde{\Psi}(\alpha)$. Die zu lösende RWA ist dann

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\tilde{\Psi}(\alpha) \;=\; 0 \qquad \tilde{\Psi}(\pi/2)=100, \qquad \tilde{\Psi}(-\pi/2)=-100$$

Allgemeine Lösung: $\tilde{\Psi}(\alpha)=c_1\alpha+c_2$.

Die Randbedingungen liefern $c_2=0$ und $c_1=\frac{200}{\pi}$. Also

$$\Psi(\rho,\alpha)=\frac{200}{\pi}\,\alpha, \qquad \text{oder} \qquad \Psi(u,v)=\frac{200}{\pi}\arctan\frac{v}{u}$$

In der physikalischen Ebene erhalten wir damit

$$\Phi(z)=\frac{200}{\pi}\arctan\frac{\operatorname{Im}(T(z))}{\operatorname{Re}(T(z))}=\frac{200}{\pi}\arctan\frac{2y}{1-x^2-y^2}$$

wobei man die letzte Gleichung durch Einsetzen von $T(z)$ und elementaren Vereinfachungen erhält.

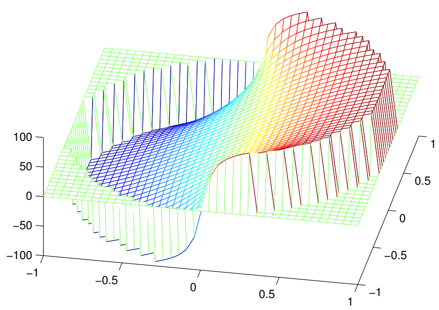
Für die Feldstärke gilt dann

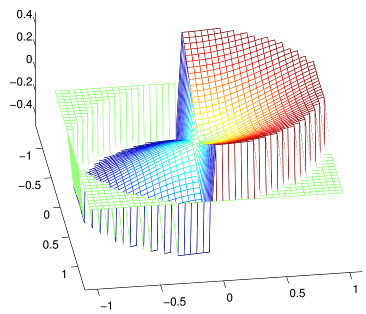
$E=-\operatorname{grad}(\Phi)=-\Phi_x-i\Phi_y=\;-\operatorname{grad}(\Psi(T(z))\overline{T'(z)}$. Also

$$E(z)=\;-\operatorname{grad}\Psi\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\overline{\left(\frac{2}{(1-z)^2}\right)}$$

oder durch direktes Ableiten von

$$\Phi(x,y)=\;\frac{200}{\pi}\arctan\frac{2y}{1-x^2-y^2}:$$





$$\begin{aligned} E &= -\operatorname{grad}(\Phi)=-\Phi_x-i\Phi_y\\ &= -\,\frac{200}{\pi((1-x^2-y^2)^2+4y^2)}\,(4xy+i(2-2x^2+2y^2)) \end{aligned}$$

Ergänzung (nicht von den Studierenden verlangt):

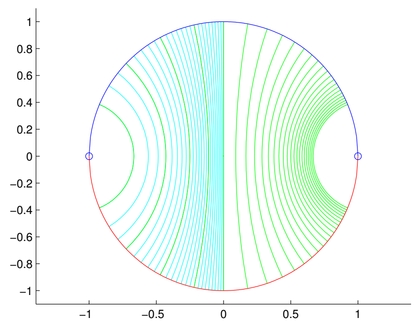
Mit dem Geschwindigkeitspotential $\tilde{U} = \Psi$ erhält man in der Modellebene:

$$\nabla\tilde{U} = \frac{200}{\pi}\begin{pmatrix} \dfrac{-v}{u^2+v^2} \\ \dfrac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

Für die Stromfunktion gilt dann $\nabla\tilde{V} = \dfrac{200}{\pi}\begin{pmatrix} \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ \dfrac{v}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$

und damit $\tilde{V}(u,v) = \dfrac{100}{\pi}\ln\left(u^2+v^2\right)$

Die Stromlinien erhält man durch Rücktransformation von $\tilde{V}$ über $f^{-1}(w) = \dfrac{w-1}{w+1}$ und plotten der zugehörigen Höhenlinien.



Aufgabe 2:

a) Für $z = x + iy$ sei $\bar{z} = x - iy$. Berechnen Sie

$$\oint_c \bar{z} \cdot z^{\frac{1}{2}}\, dz$$

längs der Kurven

$$c : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ c(t) \ = \ 4e^{it} \ \text{ und } \ C : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ C(t) \ = \ 4e^{-it}$$

und bestätigen Sie damit, dass das komplexe Kurvenintegral im Allgemeinen wegabhängig ist.

b) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Kurvenintegrale, falls diese existieren. Die Kurven sollen ein mal in positiver Richtung durchlaufen werden.

i) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z-2}\, dz$ $\qquad C_1$: Kreis mit Radius 1 um Null,

ii) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z-2}\, dz$ $\qquad C_2$: Kreis mit Radius 2 um Null,

iii) $\displaystyle\int_{C_3} \frac{1}{z-2}\, dz$ $\qquad C_3$: Kreis mit Radius 3 um Null.

Lösungsskizze zur Aufgabe 2:

a) $f(c(t)) = 4e^{-it} \cdot (4e^{it})^{\frac{1}{2}} \ = 4e^{-it} \cdot 2e^{\frac{it}{2}} \ = \ 8e^{-\frac{it}{2}}$,

$\dot{c}(t) = 4ie^{it}, \qquad f(c(t))\dot{c}(t) = 4ie^{it} 8e^{-\frac{it}{2}} = 32ie^{\frac{it}{2}}$.

$$\int_c \bar{z}\, z^{\frac{1}{2}}\, dz, = \int_0^{\pi} 32ie^{\frac{it}{2}}\, dt$$

$$= 32i \left[\frac{e^{\frac{it}{2}}}{\frac{i}{2}} \right]_0^{\pi} = 64(e^{i\frac{\pi}{2}} - e^0) = \ 64(i-1)\,.$$

$f(C(t)) = 4e^{it} \cdot (4e^{-it})^{\frac{1}{2}} \ = 4e^{it} \cdot 2e^{\frac{-it}{2}} \ = \ 8e^{\frac{it}{2}}$,

$\dot{C}(t) = -4ie^{-it}, \qquad f(C(t))\dot{C}(t) = -4ie^{-it} 8e^{\frac{it}{2}} = -32ie^{\frac{-it}{2}}$.

$$\int_C \bar{z}\, z^{\frac{1}{2}}\, dz, = \int_0^{\pi} -32ie^{\frac{-it}{2}}\, dt$$

$$= -32i \left[\frac{e^{\frac{-it}{2}}}{-\frac{i}{2}} \right]_0^{\pi} = 64(e^{i\frac{-\pi}{2}} - e^0) = \ 64(-i-1)\,.$$

b)

i) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z-2}\,dz = 0$ Nach Vorlesung Seite 97 bzw.CIS.

ii) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z-2}\,dz$ Existiert nicht, da Singularität auf der Kurve.

iii) $\displaystyle\int_{C_3} \frac{1}{z-2}\,dz = 2\pi i.$ Nach Vorlesung Seite 94 mit$r = 3$, $z_0 = 2$.

Aufgabe 3:

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(z) := \frac{e^z - 1}{e^z + e^{-z}}, \qquad f_2(z) := \frac{1}{\ln(3-z)}, \qquad f_3(z) := \frac{1}{\ln(\frac{i}{2} - 4 - z)}.$$

Bestimmen Sie für $k = 1, 2, 3$ (ohne die jeweilige Reihe zu berechnen) den Radius des größten Kreises um Null, in dem die jeweilige Taylor Reihen T_k von f_k mit Entwicklungspunkt Null gegen f_k konvergiert.

b) Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2 - 4z + 13)}$ soll in eine Taylor Reihe mit Entwicklungspunkt $z_0 := x_0 + iy_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^+$, $y_0 \in \mathbb{R}$ entwickelt werden, die mindestens in der Kreisscheibe $|z - z_0| < |z_0|$ gegen $f(z)$ konvergiert. Wie muss der Entwicklungspunkt gewählt werden, damit x_0 möglichst groß wird.

Lösungsskizze zur Aufgabe 3:

a) f_1 : der Nenner wird Null für

$e^{2z} = e^{2x} \cdot e^{2yi} = -1 = e^{i\pi} \iff x = 0\,, \quad y = k\pi + \frac{\pi}{2}\,.$

Die Reihe konvergiert im Kreis mit Radius $r = \dfrac{\pi}{2}$ gegen f.

f_2 ist nicht definiert für $3 - z = 1$ oder $3 - z = x \in (-\infty, 0\,.$
Also $z = 2$ oder $z = x \in [3, \infty)\,.$
Die Taylorreihen für f_2 konvergiert im Kreis mit Radius $r_2 = 2$ um Null.

f_3 ist nicht definiert für
$\frac{i}{2} - 4 - z = 1 \iff z = \frac{i}{2} - 5$
oder
$\frac{i}{2} - 4 - z = 1 \in (-\infty, 0] \iff z = x + \frac{i}{2}$ mit $x \in ([-4, \infty)\,.$
Also auch für $z = \frac{i}{2}\,.$
Die Taylorreihen für f_3 konvergiert im Kreis mit Radius $r_3 = \frac{1}{2}$ um Null.

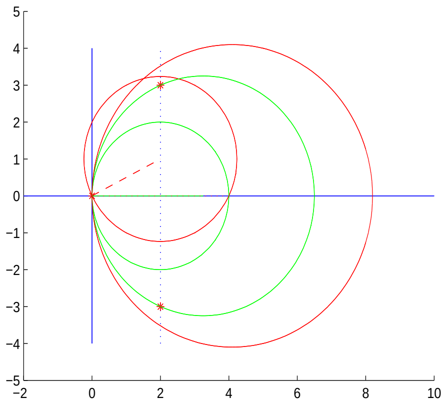
b) Der Nenner hat die Nullstellen $z_1 = 0$, $z_{2,3} = 2 \pm 3i\,.$

Die Bedingung, dass die Reihe mindestens in der Kreisscheibe $|z - z_0| < |z_0 - 0|$ gegen $f(z)$ konvergieren, soll, impliziert, dass Null auf dem Rand der Kreisscheibe liegen muss.

Der Entwicklungspunkt muss so gewählt werden, dass alle drei Nullstellen des Nenners auf einem Kreis um z_0 liegen. Wegen der Symmetrie von z_2, z_3 liegt z_0 auf der reellen Achse. Es muss gelten

$$|z - 0| = |z - (2 \pm 3i)| \iff x_0^2 = (x_0 - 2)^2 + 9 \iff x_0 = \frac{13}{4} = z_0\,.$$

Wählt man x_0 noch größer, liegen $z_{2,3} = 2 \pm 3i$ innerhalb des Kreises mit Radius x_0 um $x_0\,.$



Abgabe: 10.06.24 - 16.06.24