Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier,
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. R. Goetz

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4: Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit

$$T(i) \,=\, 0\,, \qquad T(0) \,=\, 2\,, \qquad T(2i) \,=\, \infty\,.$$

b) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation T.

(i) $K :=$ imaginäre Achse,

(ii) $K_2 := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \,=\, 2 \,\}$,

(iii) $\tilde{K} :=$ reelle Achse.

c) Bestimmen Sie das Bild der Viertelebene

$$S := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) > 0,\, \mathrm{Im}\,(z) > 0 \,\}\,.$$

d) Bestimmen Sie das Bild von

$$H := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) > 3 \,\}\,.$$

Lösungsskizze:

a) $$T(i) \,=\, 0\,,\, T(2i) \,=\, \infty \iff \qquad T(z) = \frac{a(z-i)}{z-2i}.$$

$$T(0) \,=\, 2\,, \qquad \Longrightarrow \qquad T(z) = \frac{4(z-i)}{z-2i}.$$

b) (i) Wegen der gegebenen Bilder von $0,\, i,\, 2i$ ist $T(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Alternative Lösung: $\quad 2i \in i\mathbb{R} \iff T(i\mathbb{R})$ ist eine Gerade.

$T(0) = 2,\, T(\infty) = 4 \iff T(i\mathbb{R}) \,=\, \mathbb{R}$

(ii) $2i \in K_2 \iff T(K_2)$ ist eine Gerade.

K_2 symmetrisch zu $i\mathbb{R} \quad \Longrightarrow T(K_2)$ symmetrisch zu $\mathbb{R}$.

$T(-2i) = \dfrac{4(-3i)}{-4i} = 3 \iff T(K_2)$ ist die Parallele zur imaginären Achse durch den Punkt 3

$$g_2 \,:=\, T(K_2) \,=\, \{w \in \mathbb{C} \,:\, w = 3 + iv,\, v \in \mathbb{R}\,\}.$$

(iii) $2i \notin \mathbb{R} \Longleftrightarrow T(\mathbb{R})$ ist ein echter Kreis K_R.

$\mathbb{R}$ symmetrisch zu $i\mathbb{R}$ und $K_2 \quad \Longrightarrow T(\mathbb{R})$ ist symmetrisch zu $\mathbb{R}$ und g_2. Der Mittelpunkt des Bildkreises ist also $M = 3$.

Wegen $T(0) = 2$ ist der Radius $R = 1$.

c) Das Bild der Viertelebene wird berandet durch $\mathbb{R}$ und K_R.

Nun kann man zum Beispiel rechnen:

$T(2i) = \infty \Longrightarrow$ obere Halbebene $\longrightarrow$ Äußere von K_R.

$$T(2) = \frac{8-4i}{2-2i} = \frac{2(2-i)(1+i)}{1-i^2} = 2 + 2i - i + 1 = 3 + i\,.$$

Die rechte Halbebene wird also auf die obere Halbebene abgebildet.

$$T(S) = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(w) > 0,\, |w-3| > 1\}.$$

Oder zum Beispiel:

$$T(1+2i) = \frac{4+8i-4i}{1+2i-2i} = 4+4i$$

Liegt in der oberen Halbebene und Außerhalb von K_R, also

$$T(S) = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(w) > 0,\, |w-3| > 1\}.$$

d) Das Bild der Geraden $\mathrm{Re}\,(z) = 3$ ist ein echter Kreis, da $2i$ nicht auf der Geraden liegt. Der Mittelpunkt C und ∞ sind symmetrisch bezüglich des Bildkreises. Also ist

$T^{-1}(\infty) = 2i$ bzgl. der Geraden $\mathrm{Re}\,(z) = 3$ symmetrisch zu $T^{-1}(C)$

$$\Longrightarrow T^{-1}(C) = 2i + 6 \Longleftrightarrow C = T(2i+6) = \frac{4(2i+6-i)}{2i+6-2i} = 4 + \tfrac{2i}{3}$$

Wegen $T(\infty) = 4$ hat der Kreis den Radius $r = \frac{2}{3}$. Wegen $T(0) = 2$ wird E : $\mathrm{Re}\,(z) > 3$ auf das Innere des Kreises abgebildet.

$$T(H) = \{w \in \mathbb{C} : |w - 4 - \frac{2i}{3}| < \frac{2}{3}\}.$$

Aufgabe 2:

In welchen Punkten ihres Definitionsbereiches sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar?

a) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_1(z) \,=\, \mathrm{Re}\,(z) \cdot \mathrm{Im}\,(z)\,.$

b) $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$
$f_2(z) \,=\, (\mathrm{Re}\,(z)+2)^2 - (\mathrm{Im}\,(z)+2)^2 + i\Big[\mathrm{Im}\,(z)(\mathrm{Re}\,(z)+4) \,+\, \mathrm{Re}\,(z)(\mathrm{Im}\,(z)+4)\Big]\cdot$

c) $f_3 : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ f_3(z) \,=\, \dfrac{z^2}{\bar{z}}\,.$
Tipp: Verwenden Sie die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten: $u_r = \frac{1}{r}v_\varphi$ und $v_r = -\frac{1}{r}u_\varphi\,.$

Lösungsskizze:

a) $f_1(z) \,=\, \mathrm{Re}\,(z)\cdot\mathrm{Im}\,(z) \,=\, xy + 0\cdot i \iff u = xy,\ v = 0$

Wir überprüfen die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen:

$u_x = v_y \iff y = 0, \qquad \text{und} \qquad u_y = -v_x \iff x = 0$

Die Funktion ist nur in Null komplex diff.bar.

b) $f_2(z) \,=\, (\mathrm{Re}\,(z)+2)^2 - (\mathrm{Im}\,(z)+2)^2 + i\Big[\mathrm{Im}\,(z)(\mathrm{Re}\,(z)+4) \,+\, \mathrm{Re}\,(z)(\mathrm{Im}\,(z)+4)\Big]\cdot$

$u = (x+2)^2 - (y+2)^2$ und $v = y(x+4) + x(y+4)$

Also $u_x = 2(x+2) = v_y = x+4+x$ und $-u_y = 2(y+2) = v_x = y+y+4\,.$

Die Funktion ist also überall komplex diffbar. Es ist $f_2(z) = (z+2+2i)^2 - 8i\,.$

c) $f_3(z) \,=\, \dfrac{z^2}{\bar{z}} = \dfrac{r^2e^{2i\varphi}}{re^{-i\varphi}} = re^{3i\varphi} \,=\, r\cdot\cos(3\varphi) \,+\, i\cdot\, r\cdot\sin(3\varphi)$

$u_r \,=\, \cos(3\varphi), \qquad \frac{1}{r}v_\varphi \,=\, 3\cdot\cos(3\varphi)$

f_3 kann nur in Punkten mit $\cos(3\phi) = 0$ differenzierbar sein.

$v_r \,=\, \sin(3\varphi), \qquad \frac{1}{r}u_\varphi \,=\, -3\cdot\sin(3\varphi)$

f_3 kann nur in Punkten mit $\sin(3\phi) = 0$ differenzierbar sein.

Es gibt aber keinen Winkel für den Sinus und Cosinus verschwinden. f_3 ist nirgends differenzierbar.

Alternativ:

Die Funktion $f_4(z) = \bar{z} = x - iy$ *ist nicht holomorph. Denn* $u_x = 1 \neq v_y = -1\,.$ *Wäre* f_3 *holomorph, so wäre auch*

$z^2\cdot(f_3(z))^{-1}$ *holomorph!*

Aufgabe 3:
Hinweis : Sie brauchen keine konkrete Transformation anzugeben.

a) Zur Lösung eines Potentialproblems soll das Gebiet außerhalb der beiden Kreisscheiben
$K_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z-2| \,\le\, \frac{3}{2} \right\}$, und
$K_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z+1| \,\le\, \frac{3}{2} \right\}$
auf ein Parallelstreifen oder auf das Innere eines Kreisringes um Null abgebildet werden. Welche der beiden Transformationen ist mit Hilfe einer Möbius-Transformation möglich?

b) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ fest vorgegeben. Welche der folgenden Gebiete können mittels einer Möbiustransformation auf einen Sektor der Form

$$S := \left\{ w \in \mathbb{C} : w = r\, e^{i\phi},\, r \in \mathbb{R}^+,\, -\pi < \varphi_1 < \phi < \varphi_2 < \pi \right\}$$

abgebildet werden? Bitte begründen Sie Ihre Antworten.

(i)
$$G_1 := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \alpha < |z| < \beta \} \;.$$

(ii)
$$G_2 := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \alpha < \operatorname{Re}(z) \,<\, \beta \} \;.$$

(iii)
$$G_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z-\,\alpha| < \frac{3}{4}\,|\beta-\alpha|\,,\, |z-\,\beta| < \frac{3}{4}\,|\beta-\alpha| \right\} \;.$$

Lösung:

a) Das Urbild wird begrenzt durch die zwei Kreise
$C_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z-2| \,=\, \frac{3}{2} \right\}$, und
$C_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z+1| \,=\, \frac{3}{2} \right\}$.
Diese beiden Kreis haben einen Schnittpunkt in $z_s = \frac{1}{2}$. Bei der Abbildung auf einen Ring müssten die Kreise auf zwei schnittfreie Kreise abgebildet werden. Das ist nicht möglich!

Bei der Abbildung auf einen Streifen müssen die Kreise auf zwei Graden g_1 und g_2 abgebildet werden. Diese haben einen Schnittpunkt, nämlich den unendlich fernen Punkt. Man bildet also den Schnittpunkt der beiden Kreise auf den unendlich fernen Punkt ab und erhält als Bilder der Kreise C_1 und C_2 zwei Geraden. Da die Kreise keine weiteren Schnittpunkte haben, haben auch die Bildgeraden keine weiteren Schnittpunkte. Sie sind also parallel.
Wählt man zum Beispiel reelle Koeffizienten, so werden die Mittelpunkte M_1 und M_2 von C_1 und C_2 auf reelle Zahlen abgebildet, g_1 und g_2 stehen senkrecht auf $\mathbb{R}$ und der unendlich ferne Punkt wird auf $(T(M_1)+T(M_2))/2$ abgebildet. Das Gebiet

außerhalb der beiden Kreisscheiben wird also auf den Parallelstreifen zwischen g_1 und g_2 abgebildet.

Eine Abbildung auf einen Streifen ist also möglich. Zum Beispiel $T(z) = \dfrac{1}{z - \frac{1}{2}}$.

b) Ein Sektor S der angegebenen Form wird begrenzt durch zwei verallgemeinerte Kreise mit den zwei Schnittpunkten Null und ∞ .

(i) Das Ringgebiet

$$G_1 := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \alpha < |z| < \beta \} \ .$$

wird begrenzt durch zwei schnittfreie verallgemeinerte Kreise. Die Transformation von G_1 auf S mittels einer Möbiustransformation ist nicht möglich.

(ii) Der Parallelstreifen

$$G_2 := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \alpha < \operatorname{Re}(z) < \beta \} \ .$$

wird begrenzt durch zwei verallgemeinerte Kreise mit dem Schnittpunkt ∞ . Die Transformation von G_2 auf S mittels einer Möbiustransformation ist nicht möglich.

(iii) Das Gebiet

$$G_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z - \alpha| < \frac{3}{4}\,|\beta - \alpha| \,,\, |z - \beta| < \frac{3}{4}\,|\beta - \alpha| \right\} \ .$$

wird begrenzt durch zwei verallgemeinerte Kreise mit zwei Schnittpunkten z_1 und z_2 . Bildet man mittels Möbiustransformation einen dieser Schnittpunkte auf Null ab, und den anderen auf ∞ so geht G_3 in einen Sektor über.

Bearbeitungstermine: 27.05-31.05.24