Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier,
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. R. Goetz

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Geben Sie eine Möbius-Transformation an, mit

$$T(0) = 2i,\ T(4) = 0,\ T(8) = \infty\,.$$

b) (i) Bestimmen Sie die Bilder folgender Geraden unter der Abbildung T aus a). Geben Sie dazu jeweils eine genaue Begründung an.

A) $g_1 = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Im}\,(z) = 0\}\,.$

B) $g_2 = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Im}\,(z) = 8 - \mathrm{Re}\,(z)\}\,.$

C) $g_3 = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z)\}\,.$

(ii) Auf welche Menge wird dann das Innere des Dreiecks mit den Ecken $0,\ 8,\ 4+4i$ abgebildet? Fertigen Sie Skizzen der Urbild- und Bildebene an!

Lösungsskizze zur Aufgabe 1)

a) $T(4) = 0,\ T(8) = \infty \Longrightarrow T(z) = a \cdot \dfrac{z-4}{z-8}\,.$

$T(0) = \frac{a}{2} = 2i \Longrightarrow T(z) = 4i \cdot \dfrac{z-4}{z-8}\,.$

b) (i) Verallgemeinerte Kreise durch 8 werden auf Geraden abgebildet.

A) Also ist das Bild der reellen Achse eine Gerade, wobei

$$T(0) = 2i, \quad T(4) = 0$$

gilt. Es ist also $T(\mathbb{R}) = i \cdot \mathbb{R}\,.$

B) Das Bild von $g_2 = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Im}\,(z) = 8 - \mathrm{Re}\,(z)\}$ ist wegen $8 \in g_2$ ebenfalls eine Gerade. Es gilt $T(\infty) = 4i$ und zum Beispiel

$T(8i) = 4i \cdot \dfrac{8i-4}{8i-8} = 2i \cdot \dfrac{2i-1}{i-1} = 2i \cdot \dfrac{(2i-1)(-i-1)}{-i^2+1^2} = 1+3i$

oder zum Beispiel

$T(4+4i) = 4i \cdot \dfrac{4i}{4i-4} = -4 \cdot \dfrac{-i-1}{-i^2+1^2} = 2+2i\,.$

$T(g_2) = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Im}\,(z) = 4 - \mathrm{Re}\,(z)\}\,.$

C) Das Bild von g_3 ist ein echter Kreis K da $8 \notin g_3$.
Der Bildkreis geht durch die Punkte
$T(4+4i) = 2+2i, T(0) = 2i, T(\infty) = 4i$
Der Mittelpunkt des Bildkreises liegt auf der Mittelsenkrechten auf die Verbindung von $2+2i$ und $2i$. Also ist $M = 1 + ib$.
Der Mittelpunkt liegt auf der Mittelsenkrechten auf die Verbindung von $4i$ und $2i$. Also ist $M = 1 + 3i$.
Für den Radius rechnet man zum Beispiel wegen $2i \in$ Bildkreis:
$R = \sqrt{(1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}.$

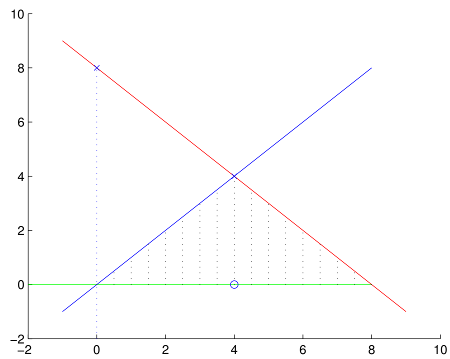
(ii) Das Dreieck wird begrenzt durch die Geraden g_1, g_2, g_3. Das Bild wird also durch die Bilder dieser Geraden begrenzt.

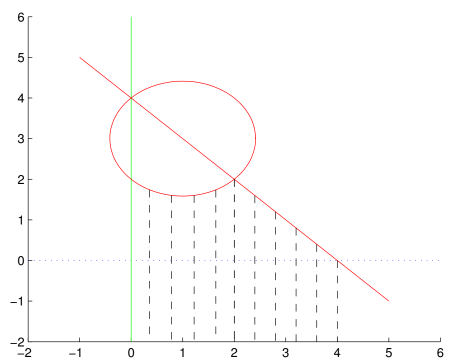
Wegen $T(4) = 0$ liegt das Bild außerhalb von K und unterhalb von $T(g_2)$.
Wegen $T(4+4i) = 2+2i$ liegt das Bild rechts von $T(g_1)$.

Alternativ, rechnet man das Bild eines Punktes aus dem Inneren des Dreiecks aus. Zum Beispiel:

Wegen $T(4+i) = \frac{8}{5}(1+i)$.

So oder so erhält man als Bild, die Punkte $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit:
$u > 0,\ v < 4 - u,\ |w - (1+3i)| > \sqrt{2}$.





Aufgabe 2:

Es sei i die imaginäre Einheit und $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $k, l \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) := (x^3 + kxy^2) + i \cdot \left(lx^2y - y^3\right)$$

in jedem Punkt aus $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

b) Gegeben ist die Funktion

$$u(x + iy) = \mathrm{Re}\,(f(x + iy)) = 3\cos(4x)e^{4y}\,.$$

i) Zeigen Sie, dass die Funktion u harmonisch ist.

ii) Bestimmen Sie alle zu u konjugiert harmonischen Funktionen v, das heißt alle Funktionen v, für die $f = u + iv$ überall in $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

Lösungsskizze:

a) Mit der üblichen Bezeichnung $z = x + iy$ gilt

$f(z) = \underbrace{(x^3 + kxy^2)}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{\left(lx^2y - y^3\right)}_{v(x,y)}.$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lauten:

$u_x = 3x^2 + ky^2 \stackrel{!}{=} v_y = lx^2 - 3y^2$ also $\boxed{-k = l = 3}$

und

$-u_y = -2kxy \stackrel{!}{=} v_x = 2lxy$ also $\boxed{k = -l}$.

Für $k = -3$ und $l = 3$ ist f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

b) i) $u_{xx} = \left(-12\sin(4x)e^{4y}\right)_x = -48\cos(4x)e^{4y}$.

$u_{yy} = \left(+12\cos(4x)e^{4y}\right)_y = 48\cos(4x)e^{4y}$.

Also $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

ii) $f(z) = u(z) + iv(z),\ u(x + iy) = \mathrm{Re}\,(f(x + iy)) = 3\cos(4x)e^{4y}$.

$v_y = u_x = -12\sin(4x)e^{4y} \iff v(x, y) = -3\sin(4x)e^{4y} + c(x)$,

$-u_y = -12\cos(4x)e^{4y} \stackrel{!}{=} v_x = -12\cos(4x)e^{4y} + c'(x)$

$\iff c'(x) = 0 \implies v(x, y) = -3\sin(4x)e^{4y} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 3:

Zur Lösung eines Potentialproblems soll das Gebiet außerhalb der beiden Kreisscheiben

$\tilde{K}_1 := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - \frac{5}{2}| \,\leq\, \frac{3}{2}\right\}$, und

$\tilde{K}_2 := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z + \frac{5}{2}| \,\leq\, \frac{3}{2}\right\}$

auf das Innere eines Kreisringes um Null abgebildet werden. Geben Sie eine geeignete Transformation an.

Lösungsskizze:

Man kann direkt die Folien 60-61 der Vorlesung nutzen, oder selbst wie folgt herleiten. Es seien K_1 und K_2 die Ränder von $\tilde{K}_1$ und $\tilde{K}_2$. Wir verwenden eine Möbius-Transformation, die diese beiden Kreise auf zwei konzentrische Bildkreise abgebildet.

Im Bild sind Null und der unendlich ferne Punkt symmetrisch zu beiden Bildkreisen. Sie müssen daher die Bilder derjenigen zwei Punkte p_1, p_2 sein, die im Urbild symmetrisch zu beiden Kreisen K_1 und K_2 sind. Die gesuchten Punkte p_1 und p_2 liegen auf der Verbindungstrcke der beiden Mittelpunkte von K_1 und K_2 also auf der reellen Achse.

Aufgrund der symmetrischen Lage der beiden Kreise zur imaginären Achse gilt $p_1 = -p_2 =: p$. Die Bedingung der Symmetrie bzgl. K_2 lautet nun:

$$(p - \frac{5}{2}) \cdot (-p - \frac{5}{2}) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow p^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \,=\, 4\,.$$

Wir wählen $p_1 = -2$ und $p_2 = 2$.

Für $T(z) := \dfrac{z-2}{z+2}$ gilt

- Die reelle Achse wird auf die reelle Achse abgebildet.
- Die Kreise K_1 und K_2 werden auf echte Kreise abgebildet, die symmetrisch zum Bild der reellen Achse liegen. Die Mittelpunkte der Bildkreise liegen also auf $\mathbb{R} = T(\mathbb{R})$.
- Es gilt:

  $T(-4) := \dfrac{-4-2}{-4+2} = 3, \qquad T(-1) := \dfrac{-1-2}{-1+2} = -3\,.$

  Das Bild von K_1 ist der Kreis mit Radius 3 um 0.

  $T(4) := \dfrac{4-2}{4+2} = \frac{1}{3}, \qquad T(1) := \dfrac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}\,.$

  Das Bild von K_2 ist der Kreis mit Radius $\frac{1}{3}$ um 0.

  Wegen $T(0) = -1$ wird das Gebiet zwischen den beiden Kreisscheiben auf das folgende Ringgebiet abgebildet:

$$R := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, \frac{1}{3} \,<\, |z| \,<\, 3\right\}\,.$$

Abgabe: 27.05-31.05.24