Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier,
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. R. Goetz

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3: Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

$\ln(z)$ bezeichne den Hauptwert des komplexen Logarithmus. Gegeben seien die komplexen Zahlen

$z_1 = \sqrt{2}(-1+i), \quad z_2 = 3i, \quad z_3 = -4i\,.$

a) Berechnen Sie die kartesischen Darstellungen von

$z_4 := z_1 \cdot z_2, \quad z_5 := \frac{z_1}{z_2}, \quad z_6 := z_1 \cdot z_3, \quad z_7 := \frac{z_1}{z_3}.$

b) Berechnen Sie $\ln(z_k), \quad k = 1, 2, ..., 7\,.$

c) Vergleichen Sie für $k = 2, 3$

$\ln(z_1 \cdot z_k)$ mit $\ln(z_1) + \ln(z_k)$
und
$\ln(\frac{z_1}{z_k})$ mit $\ln(z_1) - \ln(z_k)\,.$

d) Für welche komplexen Zahlen gelten die aus $\mathbb{R}$ bekannten Rechenregeln:

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b), \qquad \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)\,?$

Lösungsskizze:

a) Berechnen Sie die kartesischen Darstellungen von

$z_4 := z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}(-1+i) \cdot 3i = 3\sqrt{2}(-1-i)\,,$

$z_5 := \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}(-1+i)}{3i} = \frac{\sqrt{2}}{3}(1+i)\,,$

$z_6 := z_1 \cdot z_3 = \sqrt{2}(-1+i) \cdot (-4i) = 4\sqrt{2}(1+i)\,,$

$z_7 := \frac{z_1}{z_3} = \frac{\sqrt{2}(-1+i)}{-4i} = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1-i)\,,$

b) Es gilt $\ln(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$ wobei $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$. Man erhält:

$z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \implies \ln(z_1) = \ln(2) + i\frac{3\pi}{4}$

$z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \implies \ln(z_2) = \ln(3) + i\frac{\pi}{2}$

$z_3 = 4e^{-i\frac{\pi}{2}} \implies \ln(z_3) = \ln(4) - i\frac{\pi}{2}\,.$

$z_4 = z_1 \cdot z_2 = 6e^{i\frac{5\pi}{4}} = 6e^{-i\frac{3\pi}{4}} \implies \ln(z_4) = \ln(6) - i\frac{3\pi}{4}\,,$

$z_5 := \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{4}} \implies \ln(z_5) = \ln(\frac{2}{3}) + i\frac{\pi}{4}\,,$

$z_6 := z_1 \cdot z_3 = 8e^{i\frac{\pi}{4}} \implies \ln(z_6) = \ln(8) + i\frac{\pi}{4}\,,$

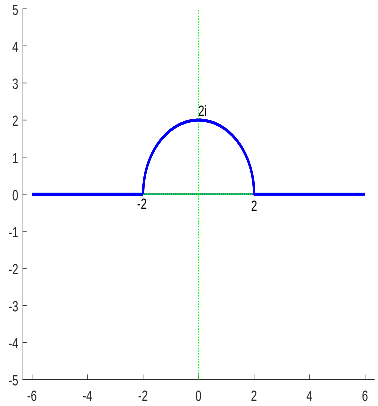
$z_7 := \frac{z_1}{z_3} = \frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \implies \ln(z_7) = \ln(\frac{1}{2}) - i\frac{3\pi}{4}\,.$

c) $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln(6) - i\frac{3\pi}{4} \neq \ln(z_1) + \ln(z_2) = \ln(6) + i\frac{5\pi}{4}$.
$\ln(z_1 \cdot z_3) = \ln(8) + i\frac{\pi}{4} = \ln(z_1) + \ln(z_3)$.
$\ln(\frac{z_1}{z_2}) = \ln(\frac{2}{3}) + i\frac{\pi}{4} = \ln(z_1) - \ln(z_2)$.
$\ln(\frac{z_1}{z_3}) = \ln(\frac{1}{2}) - i\frac{3\pi}{4} \neq \ln(z_1) - \ln(z_3) = \ln(\frac{1}{2}) + i\frac{5\pi}{4}$.

d) $\ln(c_1 \cdot c_2) = \ln(c_1) + \ln(c_2)$ gilt in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn
$-\pi < \arg(c_1) + \arg(c_2) < \pi$.
$\ln(\frac{c_1}{c_2}) = \ln(c_1) - \ln(c_2)$ gilt in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn
$-\pi < \arg(c_1) - \arg(c_2) < \pi$.

Aufgabe 2: Es seien

$D_1 := \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -2\} \cup \Big\{z \in \mathbb{C} : z = 2e^{i\phi},\, \phi \in]0, \pi[\Big\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < \infty\}$,



und

$D_2 := \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -2\} \cup \Big\{z \in \mathbb{C} : z = 2e^{i\phi},\, \phi \in]\pi, 2\pi[\Big\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < \infty\}$.

Bestimmen Sie die Bilder von D_1 und D_2 unter der Abbildung $f(z) = \dfrac{2}{z} + \dfrac{z}{2}$.

Auf welche der Mengen D_1, D_2, $D_1 \cup D_2$ ist f umkehrbar?

Lösung zur Aufgabe 2:

f ist in $\mathbb{C} \setminus 0$ differenzierbar mit $f'(z) = -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{2}$.

Es gilt $f'(z) = 0 \iff z = \pm 2$.

f ist also monoton auf $]-\infty, -2]$ und $[2, \infty[$.

$$\lim_{z \to -\infty} f(z) = -\infty \text{ und } f(-2) = -2 \Longrightarrow f(]-\infty, -2]) =]-\infty, -2]$$

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \text{ und } f(2) = 2 \Longrightarrow f([2, \infty[) = [2, \infty[$$

$$f(2e^{i\phi}) = \frac{2}{2e^{i\phi}} + \frac{2e^{i\phi}}{2} = e^{-i\phi} + e^{i\phi} = 2\cos(\phi)$$

Für $\phi \in]0, \pi[$ durchläuft $f(2e^{i\phi})$ also das Intervall $]-2, 2[$ rückwärts.

Für $\phi \in]\pi, 2\pi[$ durchläuft $f(2e^{i\phi})$ also das Intervall $]-2, 2[$ vorwärts.

Insgesamt also $f(D_1) = f(D_2) = \mathbb{R}$.

f ist auf D_1 und D_2 aber nicht auf $D_1 \cup D_2$ umkehrbar.

Aufgabe 3:

a) (i) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $(z-2i)^{10} = z^{10}$?

(ii) Zeigen Sie, dass alle Lösungen der Gleichung aus i) auf der Geraden $\text{Im}(z) = 1$ liegen.

b) (Nur für die sehr schnellen Studierenden)
Wie viele Lösungen hat die Gleichung $(z-2i)^i = z^i$?

Lösung:

a) (i) Nach Abzug von z^{10} auf beiden Seiten sucht man die Nullstellen eines Polynoms neunten Grades in $\mathbb{C}$. Es gibt also (ggf. unter Berücksichtigung der Vielfachheiten) neun Lösungen.

(ii)
$$(z-2i)^{10} = z^{10} \Longrightarrow |(z-2i)^{10}| = |z^{10}| \Longrightarrow |z-2i|^{10} = |z|^{10}$$
d.h. z hat den gleichen Abstand von 2i und 0. z liegt also auf der Mittelsenkrechten der Verbindung von 0 und 2i. Die Lösungen liegen also auf der Geraden
$$z = x + i, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

b) Lösungen von $(z-2i)^i = z^i$:

Es sei $w := f(z) := z^i$. Dann gilt
$$w = z^i = \exp(\ln(z))^i = \exp(\ln(z) \cdot i) = \exp\Big(i \cdot \ln(|z|) + i^2 \arg(z)\Big)$$
Also
$$|w| = e^{-\arg(z)}, \qquad \arg(w) = \ln(|z|) + 2k\pi \qquad \text{für geeignetes } k \in \mathbb{Z}.$$
Gilt nun $\tilde{w} := (z-2i)^i = z^i = w$, so muss zunächst
$|\tilde{w}| = |w|$ gelten. Also
$$e^{-\arg(z)} = e^{-\arg(z-2i)} \Longrightarrow \arg(z) = \arg(z-2i) \Longrightarrow z = iy, y \in \mathbb{R} \setminus [0,2]$$
Des Weiteren muss
$$\exp(i \cdot \ln(|z|)) = \exp(i \cdot \ln(|z-2i|))$$
gelten. Also mit einem $k \in \mathbb{Z}$:
$$\ln(|z-2i|) = \ln(|z|) + 2k\pi \underset{z=iy}{\Longrightarrow} \ln\left(\left|\frac{iy-2i}{iy}\right|\right) = 2k\pi \Longrightarrow \left|1 - \frac{2}{y}\right| = e^{2k\pi}$$
Für $y < 0$ oder $y > 2$ können die Betragsstriche weggelassen werden und man erhält:
$y_k = \dfrac{2}{1-e^{2k\pi}}$ mit $k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0$.
Es gibt also unendlich viele Lösungen
$$z_k = \frac{2i}{1-e^{\pm 2k\pi}} \qquad k \in \mathbb{N}$$

Bearbeitung: 07.05.24. Am 09.05. fallen die Gruppen wegen des Feiertags aus!