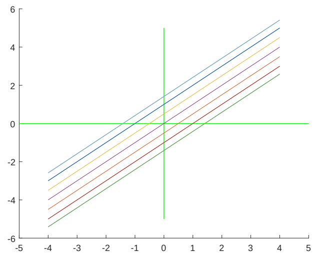
Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier,
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. R. Goetz

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die den Streifen
$S := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) - \sqrt{2} \,<\, \mathrm{Im}\,(z) \,<\, \mathrm{Re}\,(z) + \sqrt{2} \right\}$



auf den Kreisring
$R := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, 1 \,<\, |z| \,<\, 2\}$ abbildet.
Die Funktion soll dabei nicht direkt auf den Real- oder den Imaginärteil von z sondern nur auf z selbst zugreifen.

Tipp: Transformieren Sie zunächst auf einen achsenparallelen Streifen $\tilde{S}$.

Lösung:

Der Streifen wird begrenzt durch zwei Geraden:

$g_1 : \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z) - \sqrt{2}$

$g_2 : \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z) + \sqrt{2}$

Wir können zur y-Achse parallele Streifen auf Ringe abbilden. Also drehen wir zunächst

Schritt 1 : Drehen um $\pi/4$

$f_1(z) = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot z \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)z\,.$

Die Punkte $P_1 = 0 - i\sqrt{2}$, $P_2 = \sqrt{2}$ liegen auf g_1 und werden auf $1 \pm i$ abgebildet. Daher gilt

$f_1(g_1) = g_3 = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) = 1\}\,.$

Analog erhält man: $f_1(g_2) = g_4 = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) = -1\}\,.$

$f_1(S) = \{w = u + iv \,:\, -1 < u < 1,\, -\infty < v < \infty\} = \tilde{S}$

Wenn wir die Exponentialfunktion direkt auf den Bildstreifen anwenden, erhalten wir:

$\exp(f_1(z)) = \exp(u + iv) = e^u \cdot e^{iv}$

$\exp(\tilde{S}) :$ Kreisring mit Innenradius e^{-1} , Außenradius e^1

Ziel: Innenradius $1 = e^0$ und Außenradius $= 2 = e^{\ln 2}\,.$

Schritt 2: Wir verschieben den Streifen

$f_2(z) := z + 1$

$f_2 \circ f_1(S) = \{w = u + iv \,:\, 0 < u < 2,\, -\infty < v < \infty\} = \hat{S}$

Schritt 3: Jetzt skalieren wir

$f_3(z) := \frac{\ln(2)}{2} \cdot f_2 \circ f_1(z)$

$f_3(S) = \{w = u + iv \,:\, 0 < u < \ln(2),\, -\infty < v < \infty\}$

Schritt 4: Streifen $\longrightarrow$ Ring

$f_4(z) := \exp(f_3(z)) = \exp(u + iv) = e^u \cdot e^{iv}$

$f_4(S) :$ Kreisring mit Innenradius 1, Außenradius 2 um Null.

Bemerkung: Ein Vorschlag der Form $f(z) = e^{i\mathrm{Im}\,(f_1(z))} \cdot \frac{(3+\mathrm{Re}\,(f_1(z)))}{2}$ führt auch zum Ziel. Mit etwas mehr Übung neigt man aber eher dazu in Funktionsvorschriften $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\,(z)$, $\bar{z}$ möglichst zu meiden. Sonst sind die so erhaltenen Funktionen meist nicht differenzierbar.

Aufgabe 2: Gegeben sei die Menge $R = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{4} < |z| < \frac{e^3}{4}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$,
sowie die Abbildung

$$f(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot \ln(4z),$$

wobei $\ln$ den Hauptwert des komplexen Logarithmus bezeichne.

a) Skizzieren Sie die Menge R in der komplexen Ebene.

b) Bestimmen Sie das Bild von R unter der Abbildung f.

Lösungsskizze zu Aufgabe 2:

a) Skizze: R ist die rechte Hälfte des Ringes um Null mit Innenradius $\frac{1}{4}$ und Außenradius $\frac{e^3}{4}$ ohne Rand. **[1 Punkt]**

b) $f(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot \ln(4z)$.
   Sei $\tilde{w} = 4z$ dann gilt $1 < |\tilde{w}| < e^3$ und $-\frac{\pi}{2} < \arg(\tilde{w}) < \frac{\pi}{2}$. **[1 Punkt]**
   Für $\hat{w} = \ln(\tilde{w}) = \ln(|\tilde{w}|) + i\arg(\tilde{w})$ gilt dann
   $\operatorname{Re}(\hat{w}) \in]\ln(1), \ln(e^3)[=]0, 3[$, $\quad \operatorname{Im}(\hat{w}) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. **[1 Punkt]**
   Schließlich berechnen wir
   $f(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot \hat{w}$ und erhalten, durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$ in mathematisch negativer Richtung ein achsenparalleles Rechteck mit
   $\operatorname{Re}(f(z)) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\quad \operatorname{Im}(f(z)) \in]-3, 0[$. **[1 Punkt]**

Aufgabe 3) (4+3+3 Punkte)

a) Zur Lösung zweier Potentialprobleme sollen folgende Transformationen durchgeführt werden:

(i) Das Äußere der Ellipsenscheibe

$$E := \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : \frac{16x^2}{25} + \frac{16y^2}{9} \le 1 \right\},$$

also $\mathbb{C} \setminus E$, soll auf das Äußere des Einheitskreises $K_1 := \{w \in \mathbb{C} : |w| \le 1\}$ abgebildet werden.

(ii) Das Gebiet zwischen den durch $z = x + iy$ mit

$$\frac{4x^2}{3} - 4y^2 = 1 \iff \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

definierten Hyperbelzweigen soll auf einen Sektor der Form

$$S := \{w \in \mathbb{C} : \phi_1 < \arg(w) < \phi_2\}$$

abgebildet werden.

Geben Sie geeignete Transformationen an.

b) Funktioniert Ihre Methode zur Lösung von Aufgabenteil a)i) analog im Falle der Ellipse

$$E := \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \le 1 \right\},$$

Tipp: Umkehrung der Joukowski-Funktion.

Lösung:

a) (i) Die Halbachsenlängen $a = \frac{5}{4}$ und $b = \frac{3}{4}$ erfüllen $a^2 - b^2 = 1$. Die Umkehrung der Joukowski Funktion macht also aus der Ellipse einen Kreis. Den Radius des Kreises erhält man z.B. durch Einsetzen eines Punktes aus dem Rand der Ellipse. Bei richtiger Wahl der Wurzel liefert

$$\tilde{f}(z) := z + \sqrt{z^2 - 1}$$

$$\tilde{f}\left(\pm\frac{5}{4}\right) = \pm 2, \qquad \tilde{f}\left(\frac{3i}{4}\right) = 2i.$$

Man erhält also einen Kreis mit Radius 2 um Null. Um den Einheitskreis zu erhalten, wählen wir

$$f(z) := \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Wegen $f(0) = -i/2$ geht das Innere der Ellipse in das Innere des Einheitskreises über.

(ii) Es sei $J : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ die Joukowski Funktion auf der oberen komplexen Halbebene. Dann bildet $J^{-1}(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ die Hyperbelzweige auf Strahlen ab mit

$$\cos(\phi_{1,2}) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \, \sin(\phi_{1,2}) = \frac{1}{2}\,.$$

Als Bilder der Hyperbeläste erhalten wir also die Strahlen $re^{i\frac{\pi}{6}}$ und $re^{i\frac{5\pi}{6}}$. Wegen $J^{-1}(0) = i$ wird das Gebiet zwischen den Hyperbelästen auf den Sektor

$$S_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \, z = re^{i\phi}, \, \frac{\pi}{6} \, < \, \phi \, < \, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

abgebildet.

b) Nein! Zwischen den Halbachsenlängen a, b und dem Radius r des Bildkreises gelten die Beziehungen:

$$a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \qquad b = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$$

also

$$a + b = r \qquad \text{und} \qquad a - b = \frac{1}{r}.$$

Bei der Ellipse aus Teil b) haben wir $a = 5$ und $b = 3$, also

$$a + b = 8 \neq \frac{1}{a - b} = \frac{1}{2}.$$

Nicht jede Ellipse um Null wird durch die Umkehrung der Joukowski Funktion auf einen Kreis um Null abgebildet, sondern nur diejenigen mit Brennpunkten ± 1, bzw. $a^2 - b^2 = 1$.

Abgabetermine: 06.05.24 - 10.05.24