Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier,
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. R. Goetz

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2: Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Bilder der Mengen D bzw. $\tilde{D}$ bzw. $\hat{D}$ unter den angegebenen Funktionen. Skizzieren Sie jeweils die Definitionsmengen und deren Bildmengen oder beschreiben Sie diese mit Worten.

a) $D = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\,(z)| \le 4,\ |\mathrm{Im}\,(z)| \le 2\}$,
$f_1(z) = 0.5z, \quad f_2(z) = 0.5e^{i\frac{\pi}{2}}z$,

b) $\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 2,\ \mathrm{Re}\,(z) > 0\,,\ \mathrm{Im}\,(z) < 0\}$,
$f_3(z) = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}z\right)^2,\ f_4(z) = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}z\right)^2 + 1 + i,\ f_5(z) = \frac{1}{z}$.

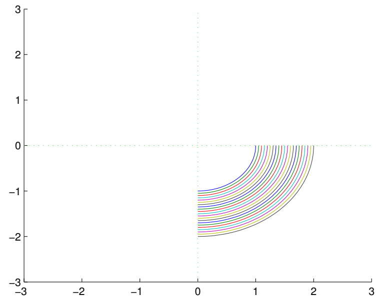
c) $\hat{D} := \left\{ z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x \in (0,2),\ y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$,
$f(z) := i \cdot e^z$.

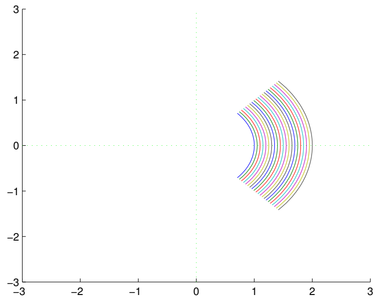
Lösungsskizze:

a) D: Achsenparalleles Rechteck mit Seitenlängen 8 und 4 und Mittelpunkt Null.
D wird durch f_1 um den Faktor 0.5 gestreckt
und durch f_2 zusätzlich um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gedreht.
$f_1(D) = \{w \in \mathbb{C} : w = u + iv, -2 \le u \le 2,\ -1 \le v \le 1\}$.

$f_2(D) : \{\hat{w} \in \mathbb{C} : \hat{w} = \hat{u} + i\hat{v}, -1 \le \hat{u} \le 1,\ -2 \le \hat{v} \le 2\}$.

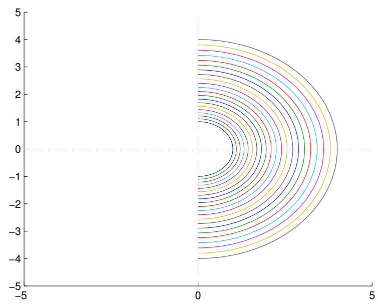
b) $\tilde{D}$: Unteres rechtes Viertel des Kreisringes um Null mit Innenradius = 1, Außenradius = 2. $z = re^{i\phi}$, $r \in [1,2]$, $-\frac{\pi}{2} < \phi < 0$.
$\tilde{D}$ wird durch f_3 zunächst um $\pi/4$ gedreht:
$\tilde{w} = e^{i\pi/4}z = \rho\, e^{i\alpha}$, $\rho \in [1,2]$, $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$.
Anschließend wird quadriert und man erhält:
$w = R\, e^{i\beta}$, $R \in [1,4]$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$.

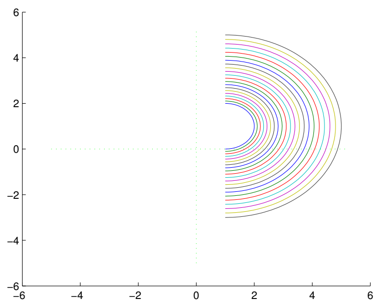




$f_3(\tilde{D})$ ist also die rechte Hälfte des Kreisringes um Null mit Innenradius $= 1$, Außenradius $= 4$.

$f_4(\tilde{D})$ ist das um $1+i$ verschobene Bild von $\tilde{D}$ unter f_3, also die rechte Hälfte des Kreisringes um $1+i$ mit Innenradius $= 1$, Außenradius $= 4$.





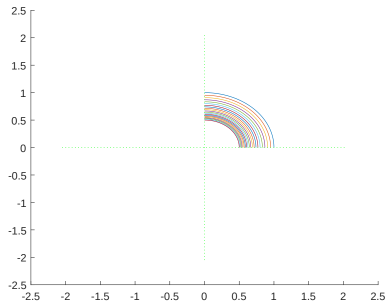
Merke: Multiplikation mit einer (festen) komplexen Zahl bewirkt eine Drehstreckung. Addition einer (festen) komplexen Zahl bewirkt eine Verschiebung.

$f_5(\tilde{D}):\qquad z = re^{i\varphi} \Longrightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\varphi}}$.

In $\tilde{D}$ gilt $1 \le r \le 2$ und $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$. Damit gilt für die Bilder $f_5(z)$ der Punkte z aus $\tilde{D}$:

$w = f_5(z) = \rho e^{i\alpha}$ mit $\frac{1}{2} \le \rho \le 1$ und $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Das Bild ist das obere rechte Viertel des Kreisringes mit Innenradius 0.5 und Außenradius 1 um Null.



c) $\hat{D}$: Achsenparalleles Rechteck mit den Ecken $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,\frac{\pi}{2})$, $(0,\frac{\pi}{2})$.

$\tilde{f}(z) := e^z \;=\; e^{x+iy} \;=\; e^x \cdot e^{iy} \quad \Longrightarrow$

$\left|\,\tilde{f}(z)\,\right| \;=\; e^x \;\in (e^0, e^2) \;=\; (1, e^2)\,, \qquad \arg\,\left(\,\tilde{f}(z)\,\right) \;=\; y \;\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$f(z) = i \cdot \tilde{f}(z)$: um $\pi/2$ gedreht. Also

$|\,f(z)\,| \;=\; \left|\,\tilde{f}(z)\right| \;\in\; (1, e^2)$,

$\arg\;(\,f(z)\,) \;\in \left(\frac{\pi}{2}\,,\,\pi\right)$.

Skizze: Viertelkreisring im zweiten Quadranten mit Innenradius 1 und Außenradius e^2 .

Aufgabe 2)

Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen

i)	$e^z = -1,$	ii)	$e^z = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i,$
iii)	$z^5 = 32,$	iv)	$z^5 = 16(1 + i\sqrt{3}).$

Lösung: i) $e^z = e^x \cdot e^{iy} = -1$

$|e^z| = e^x = 1 \iff x = 0.$

$e^{iy} = -1 = e^{i\pi} \iff y = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

ii) $e^z = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i \implies |e^z| = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+8} = 4\,.$

Analog zu i) $x = \ln(4)\,.$

$e^z = e^x \cdot e^{iy} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i = 4\,(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i) = 4e^{-i\frac{3\pi}{4}}\,.$

$\implies e^{iy} = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \implies y = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$

Das sind unendlich viele Punkte der komplexen Zahlenebene, die alle auf einer Geraden parallel zur imaginären Achse liegen.

iii) $z^5 = 32 \iff |z^5| = |z|^5 = 32 \implies |z| = 2$

Für $z = re^{i\phi}$ gilt

$z^5 = r^5 e^{i5\phi} = 2^5 e^0 \implies 5\phi = 0 + 2k\pi \implies \phi = \frac{2k\pi}{5}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}.$

Das sind fünf verschiedene Punkte der komplexen Zahlenebene, die alle auf dem Kreis mit Radius zwei um Null liegen, nämlich diejenigen zu den Winkeln $\{\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{10\pi}{5}\}$.

iv) $z^5 = 16(1 + i\sqrt{3})$

$|z^5| = |z|^5 = \sqrt{16^2 + 3 \cdot 16^2} = \sqrt{4 \cdot 16^2} = 32 \implies |z| = 2$

Für $z = re^{i\phi}$ gilt

$z^5 = r^5 e^{i5\phi} = 2^5(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 32e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\implies 5\phi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \implies \phi = \frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$

Das sind wieder fünf verschiedene Punkte der komplexen Zahlenebene auf dem Kreis mit Radius zwei um Null, nämlich diejenigen aus Teil iii) jeweils um den Winkeln $\frac{\pi}{15}$ gedreht.

Bearbeitungstermine: 22.04.24 - 26.04.24