Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier,
Dr. H.P. Kiani, Dr. C.R.Goetz

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Im $\mathbb{R}^2$ kann jedes beliebige Rechteck mittels einer affin linearen Funktion auf jedes beliebige Parallelogramm abgebildet werden. Prüfen Sie, ob das Quadrat

$$Q := \{z \in \mathbb{C}, z = x + iy,\ x, y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], i^2 = -1\}$$

jeweils mittels einer affin linearen Abbildung auf Parallelogramme mit den folgenden Ecken in $\mathbb{C}$ abgebildet werden kann und gegeben Sie gegebenenfalls eine geeignete Abbildung an.

a) $\binom{-1}{-i}, \binom{3}{-i}, \binom{3}{i}, \binom{-1}{i}$,

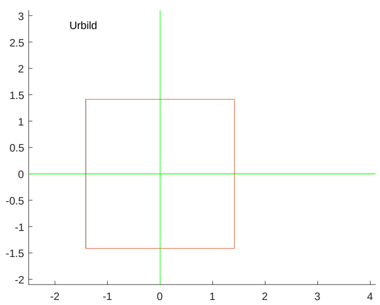
b) $\binom{-1}{-i}, \binom{3}{-i}, \binom{3}{3i}, \binom{-1}{3i}$, c) $\binom{1}{-i}, \binom{2}{2i}, \binom{-1}{i}, \binom{-2}{-2i}$,

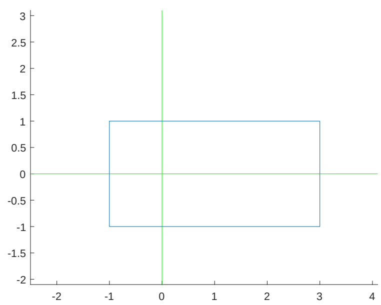
d) $\binom{0}{-2i}, \binom{2}{0}, \binom{0}{2i}, \binom{-2}{0}$, e) $\binom{2}{0}, \binom{4}{2i}, \binom{2}{4i}, \binom{0}{2i}$.

Hinweis: Skizzen können sehr hilfreich sein.

Lösung:

a) $\binom{-1}{-i}, \binom{3}{-i}, \binom{3}{i}, \binom{-1}{i}$.





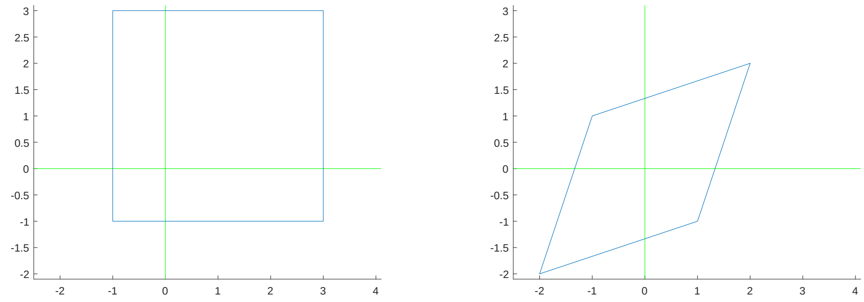
Hier würde in einer Richtung mit einem anderen Faktor gestreckt, als in die andere Richtung. Das kann keine affinlineare Funktion in $\mathbb{C}$.

b) $\binom{-1}{-i}, \binom{3}{-i}, \binom{3}{3i}, \binom{-1}{3i}$.

$f_b(z) = \sqrt{2}z + 1 + i$ leistet die gewünschte Transformation.

c) $\binom{1}{-i}, \binom{2}{2i}, \binom{-1}{i}, \binom{-2}{-2i}$.

Die Seiten haben hier zwar alle die gleiche Länge, aber die Abbildung ist nicht möglich, da eine Drehstreckung aus rechten Winkeln keine spitzen/Stumpfen Winkel machen kann.

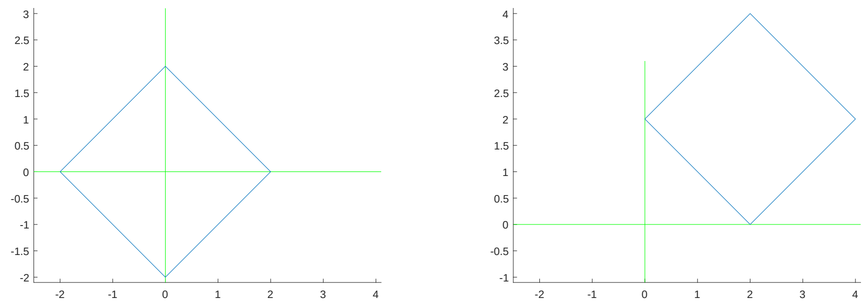


d) $\begin{pmatrix}0\\-2i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

Dies ist eine Drehung, welches eine lineare Funktion leisten kann. Zum Beispiel mit $f_d(z) := e^{i\frac{\pi}{4}}z$.

e) $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\2i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\4i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2i\end{pmatrix}$.

Hier kann man $f_e(z) := f_d(z) + 2 + 2i$ wählen. Es handelt sich um eine Drehung mit anschließender Verschiebung.



Aufgabe 2:

Es sei i die imaginäre Einheit. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichungen

$$\text{a) } e^{3z} - \frac{i}{e^z} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \text{b) } e^{2z+1+i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\,.$$

Lösung:

a)

$$e^{3z} - \frac{i}{e^z} = 0 \iff e^{4z} = i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Zu erfüllen sind die beiden Gleichungen

$|e^{4z}| = |e^{4x} \cdot e^{4iy}| = e^{4x} \overset{!}{=} |i| = 1$

und

$e^{i4y} \overset{!}{=} e^{i\frac{\pi}{2}} \iff 4y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$

Also $x = 0$ und $y_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$

b) $w := e^{2z+1+i\frac{\pi}{2}} = e^{2x+1} \cdot e^{i(2y+\frac{\pi}{2})}. \qquad .$

$|w| = e^{2x+1} \overset{!}{=} \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$

$\iff 2x + 1 = \ln(1) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}\,. \qquad .$

$e^{i(2y+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \arg\left(e^{i(2y+\frac{\pi}{2})}\right) = \arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi$

$\iff 2y + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \iff 2y = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \iff y = -\frac{\pi}{8} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}.$

Aufgabe 3: (Lesen Sie die Hinweise am Ende der Aufgabe)

Gegeben sei die Abbildung $w = f(z) := \dfrac{1}{z}$ mit $z \neq 0$.

a) Bestimmen Sie die Bilder

(i) der Strahlen $\arg(z) = \varphi_0$,

(ii) der Geraden $\mathrm{Re}\,(z) = x_0$, also $z + \overline{z} = 2x_0$,

(iii) der Geraden $\mathrm{Im}\,(z) = y_0$.

b) Bestimmen Sie das Bild des Kreises $|z - \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$ ohne $z = 0$.

Hinweis:

1) Setzen Sie in allen Teilaufgaben außer a)i) in die Gleichungen, die die Urbilder beschreiben $z = \frac{1}{w}$ und stellen sie diese Gleichungen so um, dass Sie erkennen, welche Mengen im Bildraum beschrieben werden.

2) Die Gleichung $|z - c| = r$ beschreibt einen Kreis um c mit Radius r. Machen Sie sich folgende Äquivalenzen klar, die es ermöglichen, den Kreis ohne Verwendung der Betragsstriche zu beschreiben.

$|z - c| = R \iff (z - c)\,\overline{(z - c)} = R^2$

$\iff (z - c)\,(\overline{z} - \overline{c}) = R^2$

$\iff z\overline{z} - z\overline{c} - c\overline{z} + c\overline{c} = R^2$.

Lösung:

a) (i) $f : z \to \frac{1}{z} \quad z = re^{i\varphi_0}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi_0}$ Strahl mit Winkel $-\varphi_0$ von außen nach innen durchlaufen!

(ii) $\mathrm{Re}\, z = x_0 \iff z + \overline{z} = 2x_0 \iff \frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}} = 2x_0$

A) $x_0 = 0$

$\frac{1}{z}$ nicht definiert für $y = x_0 = 0$.

Sonst $\frac{1}{z} = \frac{1}{iy} = \frac{-1}{y} i$.

Das Bild ist die imaginäre Achse ohne Null.

B) $x_0 \neq 0$

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}} = 2x_0 \iff \overline{w} + w = 2x_0 w\overline{w} \iff w\overline{w} - \frac{1}{2x_0}\overline{w} - \frac{1}{2x_0}w = 0$$

Das Bild ist ein Kreis um $\frac{1}{2x_0}$ mit Radius $\frac{1}{2|x_0|}$.

(iii) $\mathrm{Im}\,(z) = y_0 \iff z - \overline{z} = 2iy_0$

A) $y_0 = 0$ $\frac{1}{z}$ nicht definiert für $x = y_0 = 0$.

Sonst $z^{-1} = \frac{1}{x}$. Das Bild ist die reelle Achse ohne Null.

B) $\mathrm{Im}\,(z) = y_0 \neq 0$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & \tfrac{1}{2i}(z - \overline{z}) = y_0 \\
& z - \overline{z} = 2iy_0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{w} - \tfrac{1}{\overline{w}} - 2iy_0 = 0 \\
& w\overline{w} - \tfrac{1}{2iy_0}\overline{w} + \tfrac{1}{2iy_0}w = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & w\overline{w} + \tfrac{i}{2y_0}\overline{w} - \tfrac{i}{2y_0}w + \tfrac{1}{4y_0^2} = \tfrac{1}{4y_0^2}
\end{aligned}$$

Das Bild ist ein Kreis um $\frac{-i}{2y_0}$ mit Radius $\frac{1}{|2y_0|}$.

b) Der Kreis $\left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ geht durch Null. Für $z = i$ erhält man $\frac{1}{z} = -i$. Für $z \to 0$ erhält man $\frac{1}{z} \to \infty$

Es gilt $z\overline{z} - \frac{i}{2}\overline{z} + \frac{i}{2}z = 0$ oder für $z \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w\overline{w}} - \frac{i}{2\overline{w}} + \frac{i}{2w} = 0 \Longleftrightarrow & 1 - \frac{i}{2}w + \frac{i}{2}\overline{w} \;=\; 0 \\
\Longleftrightarrow & 1 \;=\; \frac{i}{2}(w - \overline{w}) = -\mathrm{Im}\,(w)
\end{aligned}$$

Das Bild ist eine zur reellen Achse parallele Gerade durch $-i$.

Abgabetermine: 22.04.24 - 26.04.24