Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier, Dr. H.P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1: Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten ($z = re^{i\phi}$) an und markieren Sie die zugehörigen Punkte in einer Skizze der komplexen Zahlenebene.

$z_0 = -4, \quad z_1 = \sqrt{8}(-1-i), \quad z_2 = -4i, \quad z_3 = \sqrt{8}(1-i), \quad z_4 = 4,$
$\tilde{z}_k = (-i)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$

b) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in kartesischen Koordinaten ($z = x+iy$) an.

$z_5 = 3\,e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_6 = 2e^{i\frac{-\pi}{6}}, \quad z_7 = 2e^{i\frac{-13\pi}{6}}.$

Lösungshinweise zu Aufgabe 1:

a) $z_0 = -4 \ = 4e^{i\pi}$. denn
$r = \sqrt{4^2+0^2} = 4, \quad \cos(\phi) = -1, \sin(\phi) = 0 \Longrightarrow \phi = \pi\,(+2k\pi)\,,$

$z_1 = \sqrt{8}(-1-i) \ = \ 4e^{i\frac{-3\pi}{4}}$ denn
$r = \sqrt{(\sqrt{8})^2+(\sqrt{8})^2} \ = \ 4, \quad \cos(\phi) = \sin(\phi) = -\frac{\sqrt{8}}{r} = -\frac{\sqrt{8}}{4} \Longrightarrow \phi = -\frac{3\pi}{4}\,(+2k\pi)\,,$

$z_2 = \ -4i \ = 4e^{i\frac{-\pi}{2}}$ denn
$r = \sqrt{0^2+4^2} = 4, \quad \sin(\phi) = -1, \cos(\phi) = 0 \Longrightarrow \phi = -\frac{\pi}{2}\,(+2k\pi)\,,$

$z_3 = \sqrt{8}(1-i) \ = \ 4e^{i\frac{-\pi}{4}}$ denn
$r = \sqrt{(\sqrt{8})^2+(\sqrt{8})^2} \ = \ 4, \quad \cos(\phi) = -\sin(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \phi = \frac{-\pi}{4}\,(+2k\pi)\,,$

$z_4 = \ 4 \ = \ 4e^{0i}$ denn
$r = \sqrt{4^2+0^2} = 4, \quad \cos(\phi) = 1, \, \sin(\phi) = 0 \Longrightarrow \phi = 0\,(+2k\pi)\,,$

Skizze : Die Punkte liegen alle auf dem Kreis mit Radius 4 um Null, beginnend mit -4 im mathematisch positivem Sinn jeweils um $\pi/4$ weiter gedreht bis 4.

$$\tilde{z}_k = (-i)^k \;=\; \begin{cases} 1 = e^0 & k = 4l\,, \quad l \in \mathbb{Z} \\ -i = e^{-i\frac{\pi}{2}} & k = 4l+1\,, \quad l \in \mathbb{Z} \\ -1 = e^{-i\pi} & k = 4l+2\,, \quad l \in \mathbb{Z} \\ +i = e^{i\frac{\pi}{2}} & k = 4l+3\,, \quad l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Skizze : Die Punkte liegen alle auf dem Kreis mit Radius 1 um Null, beginnend mit 1 im mathematischem negtivem Sinn jeweils um $\pi/2$ weiter gedreht.

b) $z_5 = 3\,e^{i\frac{\pi}{3}} \;=\; 3\,(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})) \;=\; \frac{3}{2} \;+\; i\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\,.$

$z_6 = 2e^{i\frac{-\pi}{6}} \;=\; 2\,(\cos(\frac{-\pi}{6}) + i\sin(\frac{-\pi}{6})) \;=\;=\; 2\,(\cos(\frac{\pi}{6}) - i\sin(\frac{\pi}{6})) \;=\; \sqrt{3} - \; i$

$z_7 == 2e^{i\frac{-13\pi}{6}} \;=\; 2\,(\cos(\frac{-13\pi}{6}) + i\sin(\frac{-13\pi}{6})) \;=\; 2\,(\cos(\frac{-\pi}{6}) + i\sin(\frac{-\pi}{6})) \;=\; z_6\,.$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie für die komplexen Zahlen aus Aufgabe 1) die kartesischen Darstellungen der folgenden Zahlen:

$$\mathrm{Re}\,(z_1),\quad \mathrm{Im}\,(z_1),\quad \mathrm{Re}\,(z_3),\quad \mathrm{Im}\,(z_3)\,,\quad z_1+z_3\,,\quad z_1-z_3\,,$$

$$2z_5+\sqrt{8}z_3\,,\quad \bar{z_1}\,,\quad z_1\cdot\bar{z_1}\,,\quad z_1\cdot z_2\,,\quad (z_6)^2\cdot(z_5)^4\,,\quad \frac{z_5}{z_6}\,.$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 2:

$$\mathrm{Re}\,(z_1) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{8}(-1-i)\right) = -\sqrt{8}\,.\qquad \mathrm{Im}\,(z_1) = -\sqrt{8}\,.$$

$$\mathrm{Re}\,(z_3) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{8}(1-i)\right) = \sqrt{8}\,.\qquad \mathrm{Im}\,(z_3) = -\sqrt{8}\,.$$

$$z_1+z_3 = -2\sqrt{8}\,i\,.\qquad z_1-z_3 = -2\sqrt{8}.$$

$$2z_5+\sqrt{8}z_3 = 2\left(\tfrac{3}{2}+i\cdot\tfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{8}\left(\sqrt{8}(1-i)\right) = (3+8)+i(3\sqrt{3}-8) = 11+i(3\sqrt{3}-8)\,.$$

$$\bar{z_1} = -\sqrt{8}+i\sqrt{8}\qquad z_1\cdot\bar{z_1} = 4e^{i\frac{-3\pi}{4}}\cdot 4e^{i\frac{3\pi}{4}} = 4\cdot4\cdot e^0 = |z_1|^2 = 4^2 = 16\,.$$

$$z_1\cdot z_2 = 4e^{i\frac{-3\pi}{4}}\cdot 4e^{i\frac{-\pi}{2}} = 16e^{i\frac{-5\pi}{4}} = 16e^{i\frac{3\pi}{4}} = 16(\cos(\tfrac{3\pi}{4})+i\sin(\tfrac{3\pi}{4})) = 8\sqrt{2}(-1+i)$$

Hier wäre ausnahmsweise die Multiplikation in kartesischen Koordinaten nicht aufwendiger als in Polarkoordinaten:

$$z_1\cdot z_2 = \sqrt{8}(-1-i)\cdot(-4i) = 4\sqrt{8}(i+i^2) = 8\sqrt{2}(-1+i)\,.$$

$$(z_6)^2\cdot(z_5)^4 = \left(2e^{i\frac{-\pi}{6}}\right)^2\left(3\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 2^2\cdot3^4\cdot e^{\frac{-2i\pi}{6}+\frac{4i\pi}{3}} = 4\cdot81\cdot e^{i(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3})} = 324e^{i\pi} = -324\,.$$

$$\frac{z_5}{z_6} = \frac{3\,e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{-\pi}{6}}} = \tfrac{3}{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})} = \tfrac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \tfrac{3}{2}\,i\,.$$

Aufgabe 3:

Charakterisieren Sie durch eine Skizze oder mit Worten die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z+4-3i| \leq 5\}, \\ M_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| = |z-2-i|\}, \\ M_3 &= \{z \in \mathbb{C} \mid z+\bar{z} = 2\}, \\ M_4 &= \{0\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 0\right\}. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3:

a) M_1: Kreisscheibe mit Radius $r=5$ und Mittelpunkt $M=-4+3i$ inklusive Rand.

b) M_2: Abstand z von $i =$ Abstand z von $2+i \Rightarrow$ Mittelsenkrechte auf die Verbindung zwischen i und $2+i$.
Das ist die Gerade $\{x+iy\ \mathbb{C} : x = 1\}$.

c) M_3: $\mathrm{Re}(z) = 1$: Parallele zur imaginären Achse durch $1 + 0 \cdot i$.

d) M_4: $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z^2}{z\bar{z}}\right) = 0$

Für $z \neq 0$ gilt: $\mathrm{Re}\left(\frac{(x+iy)^2}{(x+iy)(x-iy)}\right) = 0 \iff x^2 - y^2 = 0$

M_4 besteht also aus den zwei Geraden $\mathrm{Re}(z) = \pm \mathrm{Im}(z)$.

Alterenativ: $z = re^{i\phi}$, $r \neq 0$.

$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\phi}}{re^{-i\phi}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i2\phi}\right) = 0 \iff e^{i2\phi} = \pm i$

Also $2\phi = \pm\frac{\pi}{2} \qquad (+2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z})$

$\iff \phi = \pm\frac{\pi}{4} \qquad (2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z})$

Zusammen mit dem Ursprung also die beiden Geraden $\mathrm{Re}(z) = \pm \mathrm{Im}(z)$.

Aufgabe 4:

Beschreiben Sie folgende Teilmengen der komplexen Zahlenebene, ähnlich wie in Aufgabe 3, mit Hilfe von Formeln.

M_5 : Streifen parallel zur imaginären Achse mit der Breite 4, symmetrisch zu $z_0 = 1 + i$, mit Rand.

M_6 : Kreisring um Null mit Innenradius 1 und Außenradius 3, ohne Rand.

M_7 : Punktierte Kreisscheibe um Null mit Radius 3, ohne Rand.

M_8 : Sektor zwischen den Geraden mit $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ und der Geraden $-\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ in der oberen Halbebene, ohne Rand.

Lösung:

$$M_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 3\}$$

$$M_6 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\},$$

$$M_7 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 3\},$$

$$M_8 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\phi},\, r > 0,\, \frac{\pi}{4} < \phi < \frac{3\pi}{4}\}.$$

Bearbeitungstermine: 09. - 11.04.24