Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier,
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. R. Goetz

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5: Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale

a) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} |z|\,dz := \int_{C_1} |z|\,dz + \int_{C_2} |z|\,dz,$ C_1 : geradliniger Weg von -1 nach 1, C_2 : Halbkreis mit Radius 1 um Null, von 1 nach -1 in mathematisch positiver Richtung durchlaufen.

b) $\displaystyle\int_C (1+z)\,dz,$ $C(t) := \cos t + 3i \sin t,\ t \in [-\pi, 0]$ (Halbellipse)

c) $\displaystyle\int_c (\bar{z})^2\,dz,$ $c(t) = 2e^{(-1+i)t},\ t \in [0,\ \pi/4],$

d) $\displaystyle\int_C e^{3z}\,dz,$ C : Das Stück der Parabel $\mathrm{Im}\,(z) = \pi\,(\mathrm{Re}\,(z))^2$ welches die Punkte Null und $1+i\pi$ verbindet.

Aufgabe 2:

a) In welchem Gebiet ist die Möbiustransformation $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ winkeltreu?

b) Ist es möglich das Gebiet

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1,\ \mathrm{Re}\,(z) > 0,\ \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$$

mittels einer Möbiustransformation auf das Innere eines echten Dreiecks abzubilden? Unter einem echten Dreieck verstehen wir ein Dreieck dessen Eckpunkte im Endlichen liegen.

c) Die Abbildungsvorschrift $f :\ z \to e^{\frac{i\pi}{4}}\,\bar{z}$ beschreibt eine Drehspiegelung. Offensichtlich verursacht diese keine Längenverzerrungen. Die Größe der Winkel wird ebenfalls erhalten. f ist als Transformation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wo ist f komplex differenzierbar? Wie verträgt sich Ihr Ergebnis mit dem Satz aus Seite 75 der Vorlesung:

Satz: Ist $w = f(z)$ eine konforme Abbildung und als Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so ist $f(z)$ komplex differenzierbar und es gilt $f'(z) \neq 0$.

d) Das Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}\,,\ -\frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{8}\,,\ 0 < r < 2\}$ soll bijektiv und konform auf das Innere des Einheitskreises transformiert werden. Warum tut es $z \mapsto \left(\frac{z}{2}\right)^8$ nicht?

Zusatzaufgabe/Kür: Geben Sie eine bijektive, konforme Abbildung an, die das Gewünschte leistet.

Bearbeitungstermine: 10.06.24 - 14.06.24