Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier,
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. R. Goetz

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben sei ein hohler, sehr langer Kreiszylinder vom Radius 1. Die obere und die untere Hälfte seien voneinander elektrisch isoliert. Die obere Hälfte befinde sich auf dem Potential $\Phi = 100$ V und die untere Hälfte befinde sich auf dem Potential $\Phi = -100$ V. Bei entsprechender Wahl des Koordinatensystems ergibt sich auf dem Schnitt des Zylinders mit der komplexen Zahlenebene :

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= 100\mathbf{V} \quad \text{für } |z| = |x+iy| = 1\,,\ y > 0, \\ \Phi(z) &= -100\mathbf{V} \quad \text{für } |z| = |x+iy| = 1\,,\ y < 0\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie das Potential und die Feldstärke im Zylinder.

Hinweise : Transformieren Sie den Einheitskreis auf einen Sektor, zum Beispiel auf die rechte Halbebene. Bei vernünftiger Transformation hängen die Randdaten in der Modellebene nur vom Winkel ab. Verwenden Sie zur Lösung in der Differentialgleichung in der Modellebene die Potentialgleichung in Polarkoordinaten

$$\rho^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\,\Psi + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\,\Psi + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\,\Psi = 0$$

unter Berücksichtigung der speziellen Struktur der Randdaten. Schreiben Sie die Lösung in der Modellebene um in kartesische Koordinaten und transformieren Sie zurück.

Aufgabe 2:

a) Für $z = x + iy$ sei $\bar{z} = x - iy$. Berechnen Sie

$$\oint_c \bar{z} \cdot z^{\frac{1}{2}}\, dz$$

längs der Kurven

$$c : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ c(t) = 4e^{it} \text{ und } C : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ C(t) = 4e^{-it}$$

und bestätigen Sie damit, dass das komplexe Kurvenintegral im Allgemeinen wegabhängig ist.

b) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Kurvenintegrale, falls diese existieren. Die Kurven sollen ein mal in positiver Richtung durchlaufen werden.

i) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z-2}\,dz$ $\qquad C_1$: Kreis mit Radius 1 um Null,

ii) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z-2}\,dz$ $\qquad C_2$: Kreis mit Radius 2 um Null,

iii) $\displaystyle\int_{C_3} \frac{1}{z-2}\,dz$ $\qquad C_3$: Kreis mit Radius 3 um Null.

Aufgabe 3:

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(z) := \frac{e^z - 1}{e^z + e^{-z}}\,, \qquad f_2(z) := \frac{1}{\ln(3-z)}\,, \qquad f_3(z) := \frac{1}{\ln(\frac{i}{2} - 4 - z)}.$$

Bestimmen Sie für $k = 1, 2, 3$ (ohne die jeweilige Reihe zu berechnen) den Radius des größten Kreises um Null, in dem die jeweilige Taylor Reihen T_k von f_k mit Entwicklungspunkt Null gegen f_k konvergiert.

b) Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2 - 4z + 13)}$ soll in eine Taylor Reihe mit Entwicklungspunkt $z_0 := x_0 + iy_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^+$, $y_0 \in \mathbb{R}$ entwickelt werden, die mindestens in der Kreisscheibe $|z - z_0| < |z_0|$ gegen $f(z)$ konvergiert. Wie muss der Entwicklungspunkt gewählt werden, damit x_0 möglichst groß wird.

Abgabe: 10.06.24 - 16.06.24