

## Komplexe Funktionen

### für Studierende der Ingenieurwissenschaften

#### Blatt 4: Präsenzaufgaben

#### Aufgabe 1:

- a) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $T(z) := \frac{az + b}{cz + d}$  mit

$$T(i) = 0, \quad T(0) = 2, \quad T(2i) = \infty.$$

- b) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation  $T$ .

(i)  $K :=$  imaginäre Achse,

(ii)  $K_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ ,

(iii)  $\tilde{K} :=$  reelle Achse.

- c) Bestimmen Sie das Bild der Viertelebene

$$S := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

- d) Bestimmen Sie das Bild von

$$H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 3\}.$$

#### Aufgabe 2:

In welchen Punkten ihres Definitionsbereiches sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar?

- a)  $f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f_1(z) = \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z)$ .

- b)  $f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$f_2(z) = (\operatorname{Re}(z) + 2)^2 - (\operatorname{Im}(z) + 2)^2 + i[\operatorname{Im}(z)(\operatorname{Re}(z) + 4) + \operatorname{Re}(z)(\operatorname{Im}(z) + 4)].$$

- c)  $f_3 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f_3(z) = \frac{z^2}{\bar{z}}$ .

Tipp: Verwenden Sie die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten:  $u_r = \frac{1}{r}v_\varphi$  und  $v_r = -\frac{1}{r}u_\varphi$ .

**Aufgabe 3:****Hinweis : Sie brauchen keine konkrete Transformation anzugeben.**

- a) Zur Lösung eines Potentialproblems soll das Gebiet außerhalb der beiden Kreisscheiben

$$K_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq \frac{3}{2} \right\}, \text{ und}$$

$$K_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z + 1| \leq \frac{3}{2} \right\}$$

auf ein Parallelstreifen oder auf das Innere eines Kreisringes um Null abgebildet werden. Welche der beiden Transformationen ist mit Hilfe einer Möbius-Transformation möglich?

- b) Es seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha < \beta$  fest vorgegeben. Welche der folgenden Gebiete können mittels einer Möbiustransformation auf einen Sektor der Form

$$S := \left\{ w \in \mathbb{C} : w = r e^{i\phi}, r \in \mathbb{R}^+, -\pi < \varphi_1 < \phi < \varphi_2 < \pi \right\}$$

abgebildet werden? Bitte begründen Sie Ihre Antworten.

(i)

$$G_1 := \{ z \in \mathbb{C} : \alpha < |z| < \beta \} .$$

(ii)

$$G_2 := \{ z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Re}(z) < \beta \} .$$

(iii)

$$G_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < \frac{3}{4} |\beta - \alpha|, |z - \beta| < \frac{3}{4} |\beta - \alpha| \right\} .$$

**Bearbeitungstermine: 27.05-31.05.24**