

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 4: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

- a) Geben Sie eine Möbius-Transformation an, mit

$$T(0) = 2i, T(4) = 0, T(8) = \infty.$$

- b) (i) Bestimmen Sie die Bilder folgender Geraden unter der Abbildung T aus a). Geben Sie dazu jeweils eine genaue Begründung an.

A) $g_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Im}(z) = 0\}$.

B) $g_2 = \{z \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Im}(z) = 8 - \operatorname{Re}(z)\}$.

C) $g_3 = \{z \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$.

- (ii) Auf welche Menge wird dann das Innere des Dreiecks mit den Ecken $0, 8, 4+4i$ abgebildet? Fertigen Sie Skizzen der Urbild- und Bildebene an!

Aufgabe 2:

Es sei i die imaginäre Einheit und $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Für welche $k, l \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) := (x^3 + kxy^2) + i \cdot (lx^2y - y^3)$$

in jedem Punkt aus \mathbb{C} komplex differenzierbar?

- b) Gegeben ist die Funktion

$$u(x + iy) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) = 3 \cos(4x)e^{4y}.$$

- i) Zeigen Sie, dass die Funktion u harmonisch ist.

- ii) Bestimmen Sie alle zu u konjugiert harmonischen Funktionen v , das heißt alle Funktionen v , für die $f = u + iv$ überall in \mathbb{C} komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 3:

Zur Lösung eines Potentialproblems soll das Gebiet außerhalb der beiden Kreisscheiben

$$\tilde{K}_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{5}{2} \right| \leq \frac{3}{2} \right\}, \text{ und}$$

$$\tilde{K}_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{5}{2} \right| \leq \frac{3}{2} \right\}$$

auf das Innere eines Kreisringes um Null abgebildet werden. Geben Sie eine geeignete Transformation an.

Abgabe: 27.05-31.05.24