Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg — SoSe 24
Dr. Hanna Peywand Kiani — 12.07.2024

Klausurberatung Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die ins Netz gestellten Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig.

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

WZ : Werkzeug

xxx : wichtig

ϕ : nicht als Klausuraufgabe geeignet

Blatt 1: (Keine Hausaufgaben)

P1: polar $\longleftrightarrow$ kartesisch, Punkte markieren.

P2: Elementare Rechnungen Re, Im, $\pm$, $\bar{z}$, $\cdot$, z^k

W Z

P3: Geometrische Bedeutung von Betrag, konjugiert,
Erkennen von Kreisen/Abständen aus Formeln.

P4: Beschreibung von Streifen, Ringen, Sektoren mit Formeln.

Blatt 2:

Geometrische Bedeutung von Multiplikation, Addition, Potenzieren, Exponentialfunktionen, Lösen von Gleichungen

P1: Bilder von Rechtecken, Ringteilen unter oben genannten Operationen/Funktionen

P2 und H2: Gleichungen mit oben genannten Funktionen lösen.

H1: Geometrie der affin linearen Abbildung: Drehstreckung + Verschiebung/ Kein beliebiges Rechteck auf Quadrat. ∅ Verständnis

H3) a) Bilder von Strahl, Gerade, Kreis unter $1/z$.

H3) b) Bild von gegebenem Kreis bestimmen.

spezille Möbius-Transformation

Blatt 3:

P1) (Hauptzweig der) Logarithmusfunktion, Rechenregeln ln berechnen WZ
prüfen: $\emptyset$

P2) $f(z) = \frac{2}{z} + \frac{z}{2}$ Bild von ___ unter f Bijektivität

P3) Allgemeine Potenzen: Lösungen von $(z-2i)^a = z^a$, $a = 10$ bzw. $a = i$.
$\emptyset$

H1) (Nicht achsenparallelen) Streifen auf vorgegebenen Ring abbilden
$\longrightarrow$ drehen, verschieben, exp
ja, aber Funktion wird gegeben

H2) Bild gegebener Menge unter gegebener Funktion f und D gegeben. Bild gesucht
Hier Teilring unter Streckung, $\ln$ und Drehung $f: D \to ?$ XXX

H3) Gewünscht: Ellipse auf Kreis, Bereich zw. Hyperbelzweigen auf Sektor
Funktion gesucht. ← nein
Hier inverse der Joukowski Funktion $\emptyset$

Blatt 4:

P1) a) Drei Punktepaare gegeben. Möbius-Transformationsvorschrift finden, $T(z) = ?$

xxx

P1) b, c) Bilder von Mengen unter T aus a) bestimmen.

xxx

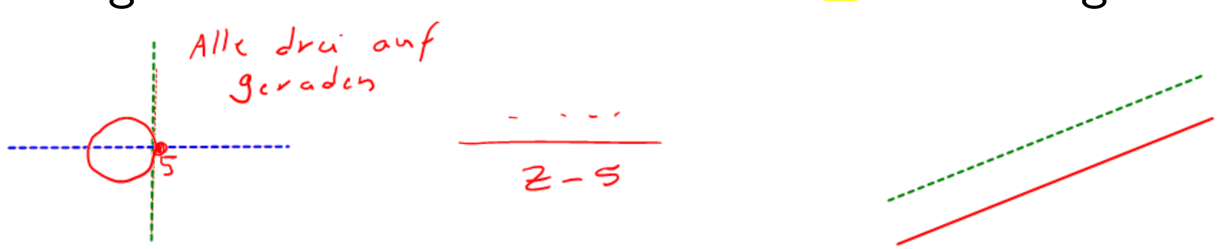
P1 d) Bild von Menge unter T: Symmetrie bzgl echtem Kreis nutzen.

P2) a,b) Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen Kartesisch.

xxx

P2) c) Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen polar

P3: Eigenschaften Möbius-Transformation: Was geht und was nicht.



xx

H1a) Drei Punktepaare gegeben: Möbius- Transformation T bestimmen.

xxx

H1b) Bilder verallgemeinerter Kreise unter T aus a).

H1c) Bild von Dreieck unter T.

H2a) Differenzierbarkeit,

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen Kartesisch. xxx

H2b) (Konjugiert) Harmonische Funktionen.

H3) Potentialproblem. Gebiet außerhalb von zwei Kreisscheiben auf Ringgebiet Möbius unter Nutzung von Symmetrie bzgl. zweier echter Kreise $\emptyset$

Blatt 5:

P1) Kurvenintegrale direkt oder mit Stammfunktion

f nicht analytisch und/oder C nicht geschlossen

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(c(t))\cdot \dot{c}(t)\,dt$$

P2) Winkeltreue, Konformität, Bijektivität

f diffbar und $f'(z) \neq 0 \Longrightarrow f$ winkeltreu konform

P2, Zusatzaufgabe: Achtel einer Kreisscheibe bijektiv und konform auf ganze Kreisscheibe abbilden. $\emptyset$

H1) Ebenes Potentialproblem lösen, konforme Abbildung konstruieren $\emptyset$

H2a) Kurvenintegral einer nicht analytischen Funktion: direkt

H2b) $\displaystyle\int \frac{1}{z-2}dz$ entlang verschiedener Kreise, CIS

Inzwischen CIS oder Residuensatz

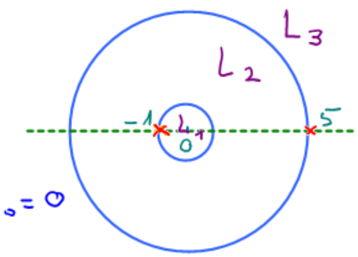
H3a) Konvergenzbereich Taylor-Reihe

H3b) Optimalen Entwicklungspunkt finden $\emptyset$

Blatt 6:

P1) Integrale über geschlossenen Kurven: CIS, CIF

Residuensatz



P2a) Wie viele Laurent-Reihen gibt es? $f(z) = \frac{z+2}{(z-5)^3(z+1)}$, $z_0 = 0$

P2b) Laurentreihe im richtigen Ring:

f: Potenzen von $z - z_0$ abspalten, Rest entwickeln ohne PBZ,

$\tilde{f}$: $\cos$ −Reihe einsetzen.

H1a) i) Kurvenintegrale über CIS, CIF $\oint_{|z|=2} \frac{1}{e^z - i} dz$, erst $e^z = i$ lösen

H1a) ii) Maximumprinzip

H1b) Verschiedene Werte Kurvenintegral über $\dfrac{z}{z^2+1}$ längs einfach geschlossener Kurve über CIS, CIF nach PBZ

inzwischen: Residuensatz verwenden

Inzwischen Residuensatz

H2a) Laurent-Reihe mit Hilfe von $\cos -$Reihe

H2b) Berechnung von Laurent-Reihe im richtigen Ring mit PBZ und $z_0 = 0$ XXX
und geometrische Reihe,

H2c) Wie b) mit $z_0 \neq 0$,

H2d) Laurent-Reihe mit Hilfe der geometrische Reihe und ableiten.

Blatt 7:

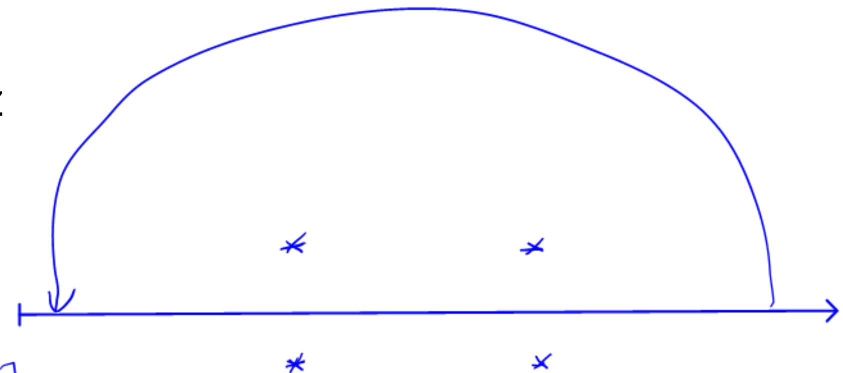
P1) Isolierte Singularitäten, Klassifikation, Residuen. xxx

P2) PBZ und Integrale über Residuensatz $\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$ xxx

nur bei einfachen Polen

H1) Isolierte Singularitäten, Klassifikation, Residuen,
Nicht Polynom/Polynom. Hauptteile mit Hilfe von Taylorreihen bzw. $\sin-$, $\sinh-$Reihen $\emptyset$

H2) Integrale über Residuensatz



H2a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ $\quad f(x)=\frac{1}{x^4+16}$ xx

H2b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) f(x)\,dx$

H2c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega x) f(x)\,dx\,.$

$\emptyset$