Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

SoSe 2024

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 7 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Isolierte Singularitäten, Komplexe Partialbruchzerlegung, Residuenkalkül, reelle Integrale

05.07.2024

Isolierte Singularitäten

Häufig sind Funktionen nur in einzelnen Punkten nicht analytisch.

Beispiel: Potential/elektrisches Feld einer Ladung Q im Punkt z_0:

$$\Phi(z) = \frac{k \cdot Q}{\|z - z_0\|}, \qquad E(z) = grad\Phi(z) = \frac{k \cdot Q}{\|z - z_0\|^3}(z - z_0)$$

Verhalten der Funktionen in der Nähe solcher Punkte?

$z_0 \in \mathbb{C}$ heißt **isolierte Singulartät** der analytischen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, wenn eine punktierte Umgebung von z_0 zu G gehört, nicht aber z_0 selbst:

$$0 < |z - z_0| < r \subset G, \quad z_0 \notin G, \quad r > 0\,.$$

Beispiel a):

- 0 und 1 sind isolierte Singularitäten der Funktion $f(z) := \dfrac{z-1}{z^2(z-1)}$.
- -1 ist keine isolierte Singularität von $f(z) := \ln(z)$.

Klassifikation

Sei z_0 isolierte Singulartät von f. Dann kann f in $0 < |z - z_0| < r$ in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, (z - z_0)^k \, .$$

- z_0 heißt **hebbare Singularität** $\quad\Longleftrightarrow\quad a_k = 0 \quad \forall k < 0 \, .$

- z_0 heißt **Pol m-ter Ordnung** mit $m \in \mathbb{N} \quad\Longleftrightarrow$
  $a_{-m} \neq 0 \, , \quad a_k = 0 \quad \forall k < -m \, .$

  Die Laurent-Reihe hat also die Form

  $$a_{-m} \frac{1}{(z - z_0)^m} + a_{-m+1} \frac{1}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + a_{-1} \frac{1}{(z - z_0)^1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (z - z_0)^k$$

- z_0 heißt **wesentliche Singularität** $\Longleftrightarrow$ $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$.

Beispiel b) $f(z) := \dfrac{1}{z(z^2+4)}$

Die Funktion hat in den Nennernullstellen 0, $2i$, $-2i$ isolierte Singularitäten.

Zur Klassifikation gibt es (mindestens) drei Möglichkeiten.

1. Möglichkeit: Reihe berechnen. Für $z_0 = 0$ und $0 < |z| < 2$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{4(1+\frac{z^2}{4})} = \frac{1}{4z} \cdot \frac{1}{\Big(1-(-\frac{z^2}{4})\Big)}$$

$$= \frac{1}{4z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} z^{2k-1} = \frac{1}{4z} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} z^{2k-1}}_{\text{positive Potenzen}}$$

$z_0 = 0$ ist also Pol erster Ordnung.

2. Möglichkeit: Reihe wird nicht berechnet

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{1}{z^2+4}}_{g(z)}$$

$g(z)$ ist holomorph (analytisch) nahe $z_0 = 0$ und kann in eine Taylor-Reihe

$$g(z) = g(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

entwickelt werden. Damit ist f nahe z_0 gegeben durch

$$f(z) = \frac{g(0)}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} (z - 0)^{k-1}$$

Wegen $g(0) = 1/4 \neq 0$ ist die niedrigste in der Reihe vorkommende Potenz von $(z - 0)$ also -1.

ACHTUNG: Für $|z| > 2$ erhält man für die gleiche Funktion f

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z^2 + 4} = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{z^2 \left(1 + \frac{4}{z^2}\right)} \right) = \ldots = \sum_{=-\infty}^{-1} (-4)^{-k-1} \, z^{2k-1}$$

also unendlich viele Terme mit negativen Potenzen!

Frage: Liegt also doch eine wesentliche Singularität in $z_0 = 0$ vor?

Kann ich nicht einfach sagen: $z = 0$ ist einfache Nullstelle des Nenners, also einfacher Pol von f?

ja, wenn

Aber:

Beispiel c) $f(z) := \dfrac{\sin(z)}{z^4} =$

hat f einen Pol 4. Ordnung in $z_0 = 0$?

$$f(z) = \frac{1}{z^4}\sin(z) =$$

$$=$$

Beispiel d) $f(z) := e^{\frac{1}{z+3}}$ hat eine isolierte Singuarität in $z_0 = -3$.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{z+3}\right)^k =$$

In $z_0 = -3$ liegt eine wesentliche Singularität vor.

Beispiel e) $f(z) := \dfrac{z + 2i}{z^2 + 4}$ Singularitäten:

$z_1 =$ $f(z) =$

ACHTUNG: hebbar $\neq$ rauskürzbar!

Beispiel f): $f(z) := \dfrac{\cos(z) - 1}{z^2}$

Sei z_0 isolierte Singulartät von f und

$$f(z) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$$

die Laurent-Reihe von f in $\underline{0 \,<\, |z-z_0| \,<\, r.}$

Dann heißt $\qquad h_f(z;z_0) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n\,(z-z_0)^n$

der zu z_0 gehörige **Hauptteil** von f. (S.134 Skript)

Es gilt (vgl. HÜ 6) für jede geschlossene Kurve C mit Uml$(C, z_0) = 1$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\,dz.$$

$a_{-1} =$ **Residuum von f in** $z_0 \,=\, Res\, f(z_0) \,=\, Res\,(f; z_0)$.

Ist z_0 eine hebbare Singularität

$$\Longrightarrow \; Res\,(f; z_0) =$$

Ist z_0 ein Pol erster Ordnung

$$\Longrightarrow \; h_f(z; z_0) =$$

Partialbruchzerlegung: Eine rationale Funktion, die im ∞ verschwindet, ist die Summe ihrer Hauptteile!

Das heißt: Mit $\quad f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)},$

p und q Polynome mit $\text{grad}(p) < \text{grad}(q)$

$z_1, \cdots, z_k$ die Nullstellen von q,

bestimmt man für jedes z_l, $l = 1, \cdots, k$ den Hauptteil und erhält mit

$$f(z) = h_f(z; z_1) + h_f(z; z_2) + \cdots + h_f(z; z_k)$$

die komplexe Partialbruchzerlegung (PBZ) von f.

Beispiel 1: $\tilde{f}(z) = \dfrac{1 + z - z^2 + iz^3}{z^2(z+i)}$,

Es gilt $\tilde{f}(z) = \dfrac{1 + z - z^2 + iz^3}{z^2(z+i)} = i + \dfrac{1+z}{z^2(z+i)} =: i + f(z)$

Bestimme die Hauptteile zum gebrochen rationalen Teil f von $\tilde{f}$ in 0 und $-i$.

$z_0 = 0$: $\quad f(z) = \dfrac{1}{z^2} \cdot \dfrac{1+z}{z+i} = \dfrac{1}{z^2} \cdot \tau(z)$

τ: Nahe 0 holomorph (also in Taylor-Reihe entwickelbar)

$$\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1+z}{z+i} = \frac{1}{z^2} \cdot [$$

Hauptteil bei Entwicklung um Null:

$$h_f(z;0) = \frac{1}{z^2}\left(\tau(0) + \tau'(0)(z-0)\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{i} + \left.\frac{z+i-1-z}{(z+i)^2}\right|_{z=0} \cdot z\right) = -\frac{i}{z^2} + \frac{1-i}{z}$$

Den Hauptteil für $z = -i$ erhält man analog als

$$f(z) = \frac{1}{z+i} \cdot \frac{1+z}{z^2} = \frac{1}{z+i} \cdot \tilde{\tau}(z)$$

$$f(z) = \frac{1}{z+i} \cdot \left[\tilde{\tau}(-i) + \tilde{\tau}'(-i)(z+i) + \tfrac{\tilde{\tau}''(-i)}{2!}(z+i)^2 + \ldots\right]$$

$$h_f(z;-i) = \frac{1}{z+i}\,\tilde{\tau}(-i) = \frac{1}{z+i}\left(\left.\frac{1+z}{z^2}\right|_{z=-i}\right) = \frac{i-1}{z+i}$$

Damit lautet die komplexe PBZ von f

$$f(z) = h_f(z;0) + h_f(z;-i) = -\frac{i}{z^2} + \frac{1-i}{z} + \frac{i-1}{z+i}$$

und $\tilde{f}(z) = i + f(z)$

Beispiel 2:) $g(z) \ = \ \dfrac{2+3z+z^2}{(z^2+4)(z^2-1)}$,

$$g(z) \ = \ \frac{2+3z+z^2}{(z^2+4)(z^2-1)} \ = \ \frac{(1+z)(2+z)}{(z^2+4)(z+1)(z-1)}.$$

g hat eine hebbare Singularität bei $z_0 = -1$ und die einfachen Pole $z_1 = 1, \ z_2 = 2i, \ z_3 = -2i$.
Mit den entsprechenden Hauptteilen gilt

$$g(z) = h_f(z; z_1) + h_f(z; z_2) + h_f(z; z_3)$$

Für $z_1 = \ 1$:

$$g(z) \ = \ \frac{1}{z-1} \frac{(1+z)(2+z)}{(z^2+4)(z+1)} \ = \ \frac{1}{z-1} k(z)$$

k ist holomorph in einer geeigneten Umgebung von 1. Damit gilt

$$h_g(z;1) \;=\; \frac{a_{-1}}{z-1} \;=\; \frac{k(1)}{z-1} \;=\; \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{z-1}$$

Für $z_2 = 2i$ rechnen wir

$$g(z) \;=\; \frac{1}{z-2i}\underbrace{\left[\frac{(1+z)(2+z)}{(z+2i)(z-1)(z+1)}\right]}_{\tilde{k}(z)}$$

$$\;=\; \frac{1}{z-2i}\left(\tilde{k}(2i) + \tilde{k}'(2i)(z-(-2i)) + \ldots\right)$$

$$h_g(z;2i) \;=\; \frac{1}{z-2i}\left[\frac{(1+z)(2+z)}{(z+2i)(z-1)(z+1)}\right]_{z=2i} \;=\; -\frac{3+i}{10}\,\frac{1}{z-2i}$$

Analog erhält man für $z_3 = -2i$

$$h_g(z;-2i) \;=\; \frac{1}{z+2i}\left[\frac{1+z)(2+z)}{(z-2i)(z-1)(z+1)}\right]_{z=-2i} \;=\; \frac{i-3}{10}\,\frac{1}{z+2i}$$

Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet also

$$g(z) = \frac{3}{5}\frac{1}{z-1} - \frac{3+i}{10}\frac{1}{z-2i} - \frac{3-i}{10}\frac{1}{z+2i}$$

und die reelle PBZ aus Analysis II:

$$g(z) = \frac{3}{5}\frac{1}{z-1} - \frac{3z-2}{5(z^2+4)}.$$

Rechenregeln für Residuen :

- **Regel 1)** z_0 einfacher Pol : (Zuhalte–Methode)

$$Resf(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

- **Regel 2)** $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, p und q holomorph in einer Umgebung von z_0,

z_0 einfache Nullstelle von q, $p(z_0) \neq 0 \Longrightarrow$

z_0 ist Pol erster Ordnung von f mit $\quad Resf(z_0) = \dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

- **Regel 3)** z_0 **Pol m-ter Ordnung**

$$Resf(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^m f(z) \right)^{(m-1)}$$

Residuensatz : Seien

$D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet

$f : D \setminus \{z_1, \cdots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph

C geschlossener Weg in $D \setminus \{z_1, \cdots, z_m\}$,

stückweise C^1.

Dann gilt
$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Uml(C, z_k)\, Res(f; z_k)$$

Insbesondere falls C einfach geschlossen, positiv orientiert und $z_1, \cdots, z_m$ innerhalb von C, d.h. $Uml(C, z_k) = 1$

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res f(z_k)$$

Beispiel: (Skizze der Kurven vor Ort)

$$f(z) = \frac{z}{z^4 - 1} = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)} = \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$$

Isolierte Singularitäten : $z_{1,2} = \pm 1 \quad z_{3,4} = \pm i$.

$$\oint_{C_1} f(z)dz = -2\pi i Resf(i)$$

$$\oint_{C_2} f(z)dz = +2\pi i \left[Resf(-i) + Resf(-1)\right]$$

$$\oint_{C_3} f(z)dz = -2\pi i \sum_{k=1}^{4} Resf(z_k)$$

Berechnung der Residuen:

$$f(z) = \frac{z}{z^4-1} = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)} = \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$$

Regel 1 für $z = i$

$$Resf(i) = \lim_{z\to i}((z-i)f(z)) = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)\ z}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$$

$$= \left.\frac{z}{(z-1)(z+1)(z+i)}\right|_{z=i} = -\frac{1}{4}$$

Regel 2 für $z = -i$

$$Resf(-i) = \left.\frac{z}{(z^4-1)'}\right|_{z=-i} = \left.\frac{z}{4z^3}\right|_{z=-i} = \frac{1}{4(-i)^2} = -\frac{1}{4}$$

$Resf(-1) =$ $\qquad\qquad$ $Resf(1) =$

Faustregel für Pole 1. Ordnung: Regel 1) einfacher falls Nenner nur als Produkt mehrerer Terme vorliegt. Regel 2) einfacher, falls Nenner ausmultipliziert vorliegt.

Also:

$$\oint_{C_1} f(z)dz = -2\pi i Resf(i)$$

$$\oint_{C_2} f(z)dz = +2\pi i \left[Resf(-i) + Res(-1)\right]$$

$$\oint_{C_3} f(z)dz = -2\pi i \sum_{k=1}^{4} Resf(z_k)$$

Partialbruchzerlegung:

Hat f hat nur einfache Pole, so bestehen die Hauptteile je aus einem Term, nämlich

$$h_f(z; z_k) = \frac{Res(f; z_k)}{z - z_k}$$

Oben hatten wir: $\quad f(z) = \dfrac{z}{z^4 - 1} = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$

Also $\quad f(z) = h_f(z; -i) + h_f(z; i) + h_f(z; -1) + h_f(z; 1).$

Mit $Resf(\pm i) = -\dfrac{1}{4}, \qquad Resf(\pm 1) = \dfrac{1}{4}$

erhält man unmittelbar die Partialbruchzerlegung:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{4} \frac{Res(f; z_k)}{z - z_k}$$

$$= \frac{\frac{-1}{4}}{z+i} + \frac{\frac{-1}{4}}{z-i} + \frac{\frac{1}{4}}{z+1} + \frac{\frac{1}{4}}{z-1}.$$

Vorsicht bei der Abdeck-Methode: z.B. mit

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(2z-4)}$$

gilt $Resf(2) \neq \left.\frac{1}{(z-1)}\right|_{z=2}$?

Beispiel zu Regel 3) $\quad f(z) = \dfrac{z^2-1}{(z-1)^2(z+1)(z-i)^4} =$

Singularitäten :

$$\begin{cases} z_1 = 1 & \text{Pol erster Ordnung} \\ z_2 = i & \text{Pol vierter Ordnung} \\ z_3 = -1 & \text{hebbar} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad Resf(z_3) = 0$$

$Resf(1) =$

Regel 3) z_0 Pol m-ter Ordnung:

$$Resf(z_0) \;=\; \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^m \, f(z)\right)^{(m-1)}$$

$$Resf(i) = \frac{1}{3!} \lim_{z \to i} \left((z-i)^4 f(z)\right)''' = \frac{1}{6} \lim_{z \to i} \left((z-i)^4 \frac{1}{(z-1)(z-i)^4}\right)'''$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{z \to i} \left(\frac{1}{z-1}\right)''' = -(z-1)^{-4}\Big|_{z=i}$$

$$= -\frac{1}{(i-1)^4} = -\frac{1}{(-2i)^2} = \frac{1}{4}\,.$$

Noch ein Beispiel: vgl. Seite 6

$$f(z) \ := \ \frac{\sin(z)}{z^4} \ =$$

$$f(z) = \frac{1}{z^4}\sin(z) \ = \ \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \dots\right)$$

$$= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} \pm \dots$$

Null ist Pol dritter Ordnung! Natürlich wendet man NICHT Regel 3) an, um Resf(0) zu berechnen. Sondern?

Uneigentliche Integrale

Satz A) Sei $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$

D Gebiet mit $H \subset D$.

f holomorph in $D \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$

$\{z_1, \cdots, z_n\} \subset H \setminus \mathbb{R}$

(d.h. keine Singularitäten in $\mathbb{R}$,)

$\lim_{z \to \infty} z \cdot f(z) = 0$ gleichmäßig in H.

(z.B. r(z) $=$ p(z)/q(z) mit grad q $\geq$ grad p $+2$)

Dann gilt $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res f(z_k)$$

Beispiel 1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-2)(x^2+1)}\,dx$

Satz nicht anwendbar! Singularität in $z = 2 \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2) $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+i)(z-i)}$$

Singularitäten in der oberen Halbebene : $z_1 = i, z_2 = 2i$

$$I = 2\pi i\,(Resf(i) + Resf(2i))$$

$$= 2\pi i \left(\left.\frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+i)}\right|_{z=i} + \left.\frac{1}{(z+2i)(z-i)(z+i)}\right|_{z=2i} \right)$$

Satz B) Fast alle Voraussetzungen wie in Satz A).

Insbesondere : endlich viele Singularitäten $\{z_1, \cdots, z_n\}$ in $H \setminus \mathbb{R}$

Anders als in A :

$\lim_{z\to\infty, y\geq 0} f(z) = 0$ wobei $z = x + iy$.

(Z.B. : f(z)= p(z)/q(z), Grad (q) $>$ Grad (p))

Dann gilt für $\omega > 0$

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx \;=\; 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\left(e^{i\omega z}f; z_k\right)$$

(vgl. Formeln zur Fouriertransformation. Dort:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega\,, \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\,)$$

Bemerkungen : für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $\cos(\omega x) f(x) = \text{Re}\left(e^{i\omega x} f(x)\right)$
- $\sin(\omega x) f(x) = \text{Im}\left(e^{i\omega x} f(x)\right)$
- Anwendung in der Fouriertransformation
- Eigenschaften gerader/ungerader Fkt'n beachten:

$$g \text{ ungerade} \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 0$$

$$g \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad \int_{0}^{\infty} g(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$$

Beispiel 3) $\quad I_3 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^4 + 2x^2 + 8} dx$

Nenner $\neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

zwei Nennernullstellen z_1, z_2 in H^+,

Satz anwendbar mit $\sin(z) f(x) = \text{Im}\left(e^{iz}\right)$

$$I_3 = \text{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{iz} dz\right) =$$

$$= \text{Im}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{2} Res\left(e^{iz} f; z_k\right)\right)$$

Rechnung ist aber nicht nötig!!!

Beispiel 4)

$$I_4 := \int_0^\infty \frac{x^3 \sin(x)}{x^6+1} dx = \frac{1}{2} \,\mathsf{Im}\, \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{z^3 e^{iz}}{z^6+1} dz \right)$$

Singularitäten in $z^6 = e^{i\pi}$, also

$$z_k = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6})} \qquad k = 0, \cdots, 5$$

In der oberen Halbebene : $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$,

$$I_4 = \tfrac{1}{2} \,\mathsf{Im}\, \left(2\pi i \sum_{k=0}^{2} Res \left(e^{iz} \frac{z^3}{1+z^6}; z_k \right) \right)$$

$$= \pi \,\mathsf{Im}\, \left(i \sum_{k=0}^{2} \left. \frac{e^{iz} z^3}{6z^5} \right|_{z=z_k} \right) = \tfrac{\pi}{6} \,\mathsf{Im}\, \left(i \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{iz_k}}{z_k^2} \right)$$

$$iz_0 = ie^{i\frac{\pi}{6}} = i(\cos(\tfrac{\pi}{6}) + i \sin(\tfrac{\pi}{6})) = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

$$iz_1 = ie^{i\frac{\pi}{2}} = i \cdot i = -1,$$

$$iz_2 = ie^{i\frac{5\pi}{6}} = i(\cos(\tfrac{5\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{5\pi}{6})) = -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$z_0^2 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_1^2 = e^{i\pi} = -1,$$

$$z_2^2 = e^{i\frac{10\pi}{6}} = e^{i\frac{-2\pi}{6}} = e^{i\frac{-\pi}{3}} = \tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Alles einsetzen

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{\pi}{6}\,\mathsf{Im}\,\left(i\left[\frac{e^{iz_0}}{z_0^2} + \frac{e^{iz_1}}{z_1^2} + \frac{e^{iz_2}}{z_2^2}\right]\right) \\
&= \frac{\pi}{6}\,\mathsf{Re}\,\left(\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{e^{-1}}{-1} + \frac{e^{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]\right) \\
&= \frac{\pi}{6}\,e^{-\frac{1}{2}}\,\mathsf{Re}\,\left(\frac{e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} - e^{-\frac{1}{2}} + \frac{e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)
\end{aligned}$$

und ausrechnen

$$I_4 = \frac{\pi}{6}\, e^{-\frac{1}{2}}\, \mathsf{Re}\ \left[\left(\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}) + i \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}) \right) \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \ e^{-\frac{1}{2}} \right.$$

$$\left. + \ \left(\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}) - i \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}) \right) \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{6}\, e^{-\frac{1}{2}}\ \left[\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \sqrt{3} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}) - \ e^{-\frac{1}{2}} \right]$$