Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2024

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 6 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Cauchy-Interalformeln
Laurent-Reihen

Falls nicht deutlich anders vermerkt gilt für die gesamte HÜ: Γ (das Bild einer) geschlossene(n) stückweise C^1 Kurve in $D \subset \mathbb{C}$. $Uml(\Gamma, z_0) = 1$.

Wiederholung: Wir hatten bereits:

Cauchyscher Integralsatz (CIS) :

D **einfach** zusammenhängend und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0\ .$$

Einfach zusammenhängend: D hat keine Löcher

Homotopie: Sind Γ und $\tilde{\Gamma}$ zwei geschlossene stückweise C^1 Kurven, die im Holomorphiegebiet von f, stetig und ohne Aufschneiden ineinander verformt werden können, dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\tilde{\Gamma}} f(z)\,dz$$

Sei C der positiv orientierte Kreis in D, mit Radius r, um einen Punkt z_0, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\int\limits_C (z - z_0)^n \, dz \; = \; \int_0^{2\pi} (z_0 + re^{it} - z_0)^n \, ire^{it} \, dt \; = \; \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Homotopie: für jede einfach geschlossene (=doppelpunktfreie) Kurve Γ, die z_0 einmal positiv umläuft gilt

$$\int\limits_\Gamma (z - z_0)^n \, dz, = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Für jede geschlossene Kurve Γ,und jedes $z_0 \notin \Gamma$ gilt

$$\int\limits_\Gamma (z - z_0)^n \, dz, = \begin{cases} Uml(\Gamma, z_0) \cdot 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

Cauchyschen Integralformeln (CIF):

Sei f analytisch in einfach zusammenhängendem D

$C : [a, b] \to D \setminus \{z_0\}$ geschlossen, z_0 homotop, stkw. C^1,

Uml$(C, z_0) = 1$: d.h. z_0 wird einmal in math. positiver Richtung umlaufen.

Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz \qquad (CIF\ I)$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \qquad (CIF\ II)$$

Falls $k = Uml(C, z_0) \neq 1$ erhält man auf der linken Seite noch den Faktor $k \in \mathbb{Z}$.

Achtung: Integrand nicht mehr analytisch im inneren von C, aber f!

Beweis: (Seiten 109/110 Skript)

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{z_0+re^{it}-z_0} \cdot ire^{it}\,dt$$

$$= 2\pi i \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt} \qquad \forall r>0:\ K_r(z_0)\subset D$$

$$\xrightarrow{r\to 0}$$

Folgerungen:

Mittelwerteigenschaft: f analytisch in G und stetig, $z_0 \in G$, $K_r\bar{(}z_0) \in G$, dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})$$

Maximumprinzip: f analytisch in G und stetig in $\overline{G}$ und nicht konstant, dann nimmt $|f|$ nur auf dem Rand sein Maximum an.

Anwendungen/Beispiele

Berechnung von Integralen bei Nennernullstellen

Folgende Kurvenintegrale sollen berechnet werden . Die angegebenen Kurven sollen, wenn nicht anders vermerkt, einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

a) $\displaystyle\int_{C_k} \frac{1}{z^2-2z}\,dz \qquad k=1,2 \qquad C_1\,:\,|z|=1, \quad C_2:|z-5|=1,$

$$\int_{C_1} \frac{1}{z(z-2)}\,dz \;=\; \int_{C_1} \frac{\frac{1}{z-2}}{z}\,dz \;=$$

$$\int_{C_2} \frac{1}{z^2-2z}\,dz \;=$$

b) $I_C := \int_C \frac{e^z}{1+4z^2}\,dz \qquad C : |\mathsf{Re}\,z| + |\mathsf{Im}\,z| \;=\; 1,$

1. Möglichkeit : PBZ

$$I_C := \int_C e^z \left(\frac{a}{2z+i} + \frac{b}{2z-i}\right)\,dz$$

$$= \int_C e^z \left(\frac{i/2}{2z+i} + \frac{-i/2}{2z-i}\right)\,dz$$

$$= \frac{i}{2}\left(\int_C \frac{e^z}{2z+i}dz - \int_C \frac{e^z}{2z-i}dz\right)$$

ACHTUNG:

$$I_C \neq = \tfrac{i}{2}\left(2\pi i e^{-\frac{i}{2}} - 2\pi i e^{\frac{i}{2}}\right) = -\pi i(-2\sin(1/2))$$

Warum?

Richtig wäre?

2. Möglichkeit : Kurve zerlegen

$$I_C := \int_C \frac{e^z}{1+4z^2}\,dz \;=\; \int_C \frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})(z-\frac{i}{2})}dz$$

$$= \int_{C_1} \frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})(z-\frac{i}{2})}\,dz + \int_{C_2} \frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})(z-\frac{i}{2})}$$

$$= \int_{C_1} \frac{\frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})}}{(z-\frac{i}{2})}\,dz \;+\; \int_{C_2} \frac{\frac{e^z}{4(z-\frac{i}{2})}}{(z+\frac{i}{2})}\,dz$$

$$= 2\pi i \left(\left.\frac{e^z}{4(z+\frac{i}{2})}\right|_{z=\frac{i}{2}} \;+\; \left.\frac{e^z}{4(z-\frac{i}{2})}\right|_{z=\frac{-i}{2}} \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^{\frac{i}{2}}}{4i} + \frac{e^{-\frac{i}{2}}}{-4i} \right) \;=\; \pi i \sin(1/2)$$

Merke: Bei $\dfrac{g(z)}{\text{Polynom}}$

wenn **nur eine einfache Nennernullstelle** umlaufen wird, spalte zugehörige(n) Linearfaktor(en) im Nenner ab, versuche den Rest nach oben in den Zähler zu ziehen und CIF I zu verwenden.

Mehrere Definitionslücken: Zerlege Kurve oder Bruch!

Mehrfache Nullstellen im Nenner: CIF II

$C : [a, b] \to D \setminus \{z_0\}$ geschlossen, z_0 homotop, stkw. C^1

$$\boxed{\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz = Uml(C, z_0) \cdot 2\pi i \cdot \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$

Beispiel: $C_k(\phi) = \, ke^{-i\phi}, \; \phi \in [0, 2k\pi]\, , k = 1, 3, 4, 5.$

$$\int\limits_{C_1} \frac{e^{-z}}{(z-3)^3}\, dz \; =$$

$$\int\limits_{C_3} \frac{e^{-z}}{(z-3)^3}\, dz \; =$$

$$\int\limits_{C_4} \frac{e^{-z}}{(z-3)^{2+1}}\, dz$$

CIF II: $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \; = \; Uml(C, z_0) \cdot 2\pi i \cdot \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Taylor-Reihen: Wie schon in $\mathbb{R}$

$$\boxed{T(z;f,z_0) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z-z_0)^n\,.}$$

Für jedes Γ geschlossen, mit $Uml\,\Gamma(z_0) = 1$ gilt (CIF)

$$\boxed{a_n \;=\; \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz}$$

Die Reihe konvergiert im größten Kreis um z_0 in dem f analytisch ist **gegen** f.

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z-z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \oint\limits_{\Gamma} (z-z_0)^n dz = 0$$

Beispiel a) Die Taylor-Reihe von

$$f(z) := \frac{5}{z-3}\,, \qquad \text{mit } z_0 \;=\; 0$$

Für $z \;=\; 3$ liegt eine Definitionslücke (isolierte Singularität) vor! Sonst ist f analytisch. Verwende geometrische Reihe: Ziel $(z - z_0)$ Potenzen!

$$f(z) \;=\; \frac{5}{z-3} \;=\; \frac{5}{(-3)\left(1-\frac{z}{3}\right)} \;=\; -\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

$$= -\frac{5}{3}\; \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k = \;\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{3^{k+1}}\right) \cdot (z-0)^k$$

Konvergenz liegt vor für $\left|\frac{z}{3}\right| \;<\; 1$ also $|z| \;<\; 3 = r$.
Der Satz aus der Vorlesung besagt, dass die Reihe in dieser Kreisscheibe nicht gegen irgendwas, sondern gegen f konvergiert.

Und was, wenn ich für $|z| > 3$ auch gerne eine Reihe aus $(z - z_0)$ Potenzen hätte?

$$f(z) = \frac{5}{z-3} = \frac{5}{z\left(1 - \frac{3}{z}\right)}$$

$$= \frac{5}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(5 \cdot 3^k \frac{1}{z^{k+1}}\right) = \sum_{l=} \qquad z^l$$

Allgemeiner:

Laurent-Reihen

Seien: $G \subset \mathbb{C}$, $\quad f : G \to \mathbb{C}$ holomorph in G.

$$D := \{z \in \mathbb{C} \,:\, r < |z - z_0| < R\} \subset G$$

Dann kann f in D in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz}$$

wobei Γ: wie oben

- Die Reihe konvergiert im größten Ringgebiet $\subset D$ gegen f.

- Die Reihe ist bei vorgegebenem Ring eindeutig.

- Ziel ist NICHT die Koeffizienten über die Integrale zu rechnen sondern umgekehrt.

  Die Koeff' berechnet man z.B. mit

  - bekannten Reihen (Beispiel d,e)
  - geometrische Reihe (Beispiel a oben, Beispiel b, c,f unten)
  - Ableitungen, Integrale (Beispiel f)

Beispiel b: $f(z) = \dfrac{5}{z-3}$

Gesucht: Entwicklung um $z_0 = 1$.

Definitionslücke (Isolierte Singularität) in $z = 3$.

Funktion ist analytisch in jedem der Ringe:
$R_1 :\ 0 \ \leq \ |z-1| \ < \ |3-1|$
$R_2 :\ |3-1| \ < \ |z-1| \ < \ \infty$

$z_0 = 1$: Wir wollen in der Reihe Potenzen von $(z-1)$

Umschreiben der Funktion: $f(z) = \dfrac{5}{z-3} = \dfrac{5}{(z-1)+1-3} = \dfrac{5}{(z-1)-2}$

Für $z \in R_1$ gilt: $|z-1| < |-2|$

$$\frac{5}{z-3} = \frac{5}{(z-1)-2} = \frac{5}{-2\left(1-\dfrac{z-1}{2}\right)}$$

$$= -\frac{5}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-5}{2^{k+1}}(z-1)^k \ .$$

In R_1 ist also: Laurent Reihe = Taylor Reihe, d.h. $a_k = 0 \qquad \forall k < 0.$

Für $z \in R_2$ gilt $|z-1| > |-2|$. Damit wir eine konvergente geometrische Reihe erhalten teilen wir hier im 1. Schritt durch $(z-1)$.

$$\frac{5}{(z-1)-2} = \frac{5}{(z-1)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \dfrac{2}{z-1}\right)}$$

$$= \frac{5}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot \frac{2^k}{(z-1)^{k+1}}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{-1} 5 \cdot 2^{-l-1} \cdot (z-1)^l \,.$$

Erste Reihe konvergent im ersten Ring gegen f
Zweite Reihe konvergent im zweiten Ring gegen f
Keine Darstellung für $|z-1| = 2$

Beispiel c) $f(z) := \dfrac{1}{z(z^2+4)}$, $z_0 = 0$.

Die Funktion hat die den Nennernullstellen 0, $2i$, $-2i$

Wie viele Laurent-Reihen? In welchen Ringen?

Für $z_0 = 0$ und $0 < |z| < 2$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{4(1+\frac{z^2}{4})}$$

$$= \frac{1}{4z} \cdot \frac{1}{\left(1-(-\frac{z^2}{4})\right)} = \frac{1}{4z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} z^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} z^{2k-1} = \frac{1}{4z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} z^{2k-1}$$

Für $|z| > 2$ erhält man für die gleiche Funktion f

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z^2 + 4} = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{z^2 \left(1 + \frac{4}{z^2}\right)} \right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} (-4)^{-k-1} \, z^{2k-1}$$

Beispiel d) $f(z) := \dfrac{\sin(z)}{z^4}$, $z_0 = 0$.

Beispiel e) $f(z) := e^{\frac{1}{z+3}}$, $z_0 = -3$.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{z+3}\right)^k =$$

Beispiel f): $f(z) := \left(\dfrac{1}{4-z^2}\right)^2$, $z_0 = 0.$

Gesucht Reihe im Ring $0 \leq |z| < 2$

Einerseits $$\left(\frac{1}{4-z^2}\right)' = \frac{2z}{(4-z^2)^2}$$

Andererseits

$$\frac{1}{4-z^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-\frac{z^2}{4})} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z^2}{4})^k$$

Also

$$\frac{1}{(4-z^2)^2} = \tfrac{1}{2z}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{4^{k+1}}\right)'$$

Beispiel g) Nur bei genügend Zeit:

$f(z) = \frac{4}{(z-3)(z+1)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+1}, z_0 = 0$

Gesucht: Diejenige Reihe, die für $z^* = 2$ gegen $f(z^*)$ konvergiert.

Ringe:

R_1 :
R_2 :
R_3 :

Wir suchen die Reihe für $1 < |z - z_0| = |z| < 3$

$\frac{1}{z-3} =$

$\frac{1}{z+1} =$

Zur Hausaufgabe 1b)

Doppelpunktfrei: kein Punkt wird mahr als ein mal durchlaufen.

Zur Beantwortung der Frage vergleiche auch Seite 31 HÜ 5.

Skizzen vor Ort