

Dr. Hanna Peywand Kiani

# **Hörsaalübung 5 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften**

## **Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen Integration**

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

# Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen

**Für die gesamte HÜ:** Wenn nicht ausdrücklich anders erklärt:

$G$ : Gebiet in  $\mathbb{C}$ , also offene, zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{C}$ .

$$i^2 = -1, \quad z = x + iy = re^{i\phi}, \quad x, y, r, \phi \in \mathbb{R}$$

$$f : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad f : z \mapsto f(z) = w = u + iv = \rho e^{i\alpha}, \quad u, v, \rho, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Also } f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

$$\text{Oder } f(z) = f(re^{i\phi}) = u(r, \phi) + iv(r, \phi).$$

**Zur Erinnerung: Komplexe Differenzierbarkeit:**  $f$  heißt in  $z_0$  komplex diff.bar, falls

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert.

**analytisch/ holomorph/ regulär in  $G$**  : in ganz  $G$  komplex differenzierbar.

**Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen (CR-DGL'n) :**

Seien  $u$  und  $v$  in einer Umgebung von  $z_0$  partiell diffbar nach  $x$  und  $y$ . Dann:

$f$  in  $z_0$  komplex differenzierbar  $\iff$  in  $z_0$  gelten die (CR-DGL'n)

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

Dann gilt

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + i \cdot v_x(z_0)$$

**Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen in Polarkoordinaten**

$$u_r = \frac{1}{r} v_\phi, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\phi$$

## Definitionen:

**Winkeltreue** einer Funktion  $f$ : Für alle  $z_0 \in G$  gilt:

*Winkel zwischen Kurven, die sich in  $z_0$  schneiden bleiben bei der Abbildung  $z \mapsto w = f(z)$  (in Größe und Orientierung) erhalten.*

**Längentreue:** Für alle  $z_0 \in G$  gilt:

*Alle von  $z_0$  ausgehenden Richtungen werden bei der Abbildung  $z \mapsto w = f(z)$  um den gleichen Faktorstreckt.*

**Konforme Abbildung:**

- $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt konform, wenn  $f$  winkel- und längentreu ist.

- Eine analytische Funktion ist in jedem Punkt  $z \in D(f)$  mit  $f'(z) \neq 0$  konform.

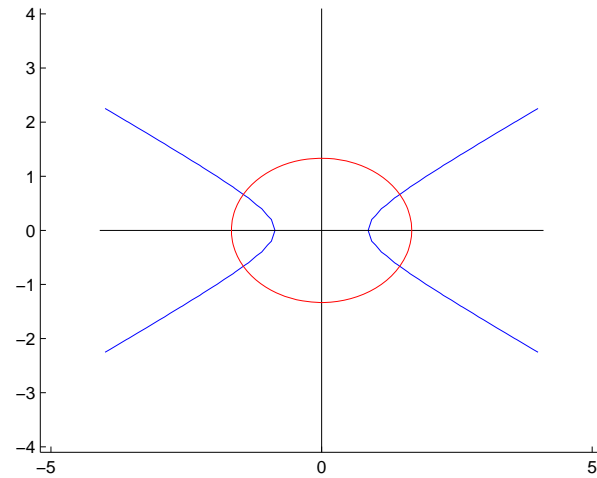
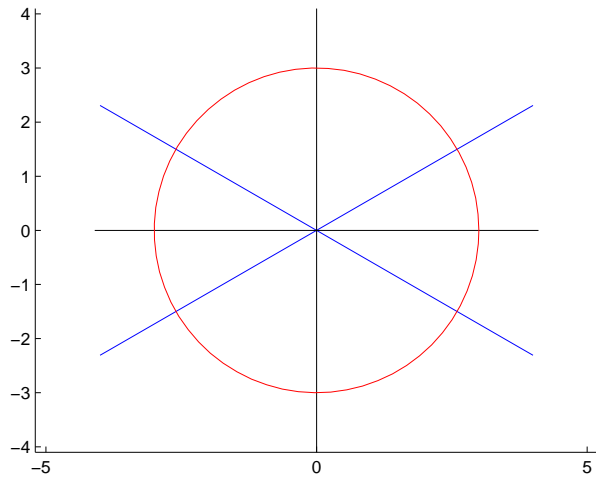
Streckfaktor (lokal):  $|f'(z_0)|$

Drehwinkel (lokal):  $\arg(f'(z_0))$ .

- Ist  $f : z \rightarrow f(z) = u(z) + iv(z)$  in  $z_0$  konform und  $u$  und  $v$  in einer Umgebung von  $z_0$  stetig diffbar, dann ist  $f$  differenzierbar in  $z_0$  mit  $f'(z) \neq 0$ .

**Beispiel 1:**  $f(z) = z^2$

**Beispiel 2:** Die Joukowski Funktion  $f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$



# Konforme Verpflanzung von Potentialen

## **Situation:**

Potentialgleichung ist in einem schwierigen Gebiet zu lösen.

## **Idee:**

Transformiere das Problem, so dass das Gebiet einfacher wird.

## **Hacken:**

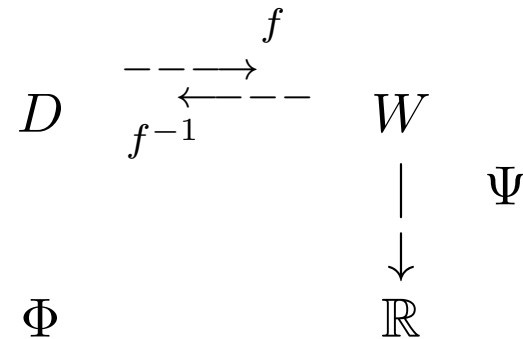
Im allgemeinen Fall entsteht eine schwierigere DGL.

## **Schön:**

Bei konformen Transformationen bleibt es bei der Potentialgleichung.

Sei also  $D \subset \mathbb{C}$  und  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  irgendeine  $C^2$ -Funktion.

$f : D \rightarrow W \subset \mathbb{C}$ ,      bijektiv ( $f' \neq 0$ ), analytisch  
 $f(z) = f(x + iy) = w = u + iv$



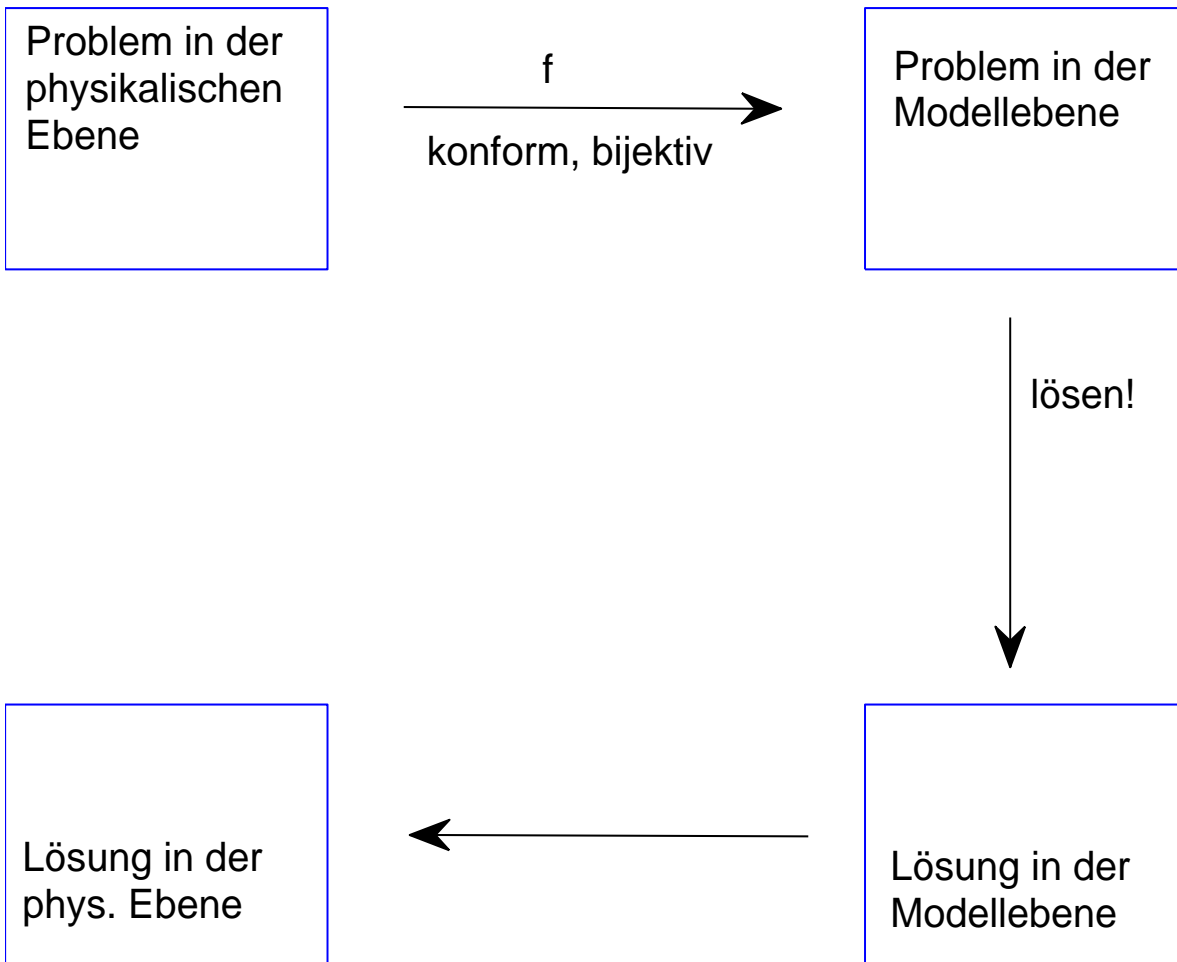
Definiere:

$$\Psi(w) := \Phi (f^{-1}(w))$$

= **konforme Verpflanzung von  $\phi$  mittels  $f$ .**

**Merke** für später:  $\Phi = \Psi \circ f$





Neben Potential  $\Phi$  interessant: Feldstärke  $E = -\mathbf{grad}(\Phi)$

Gradient im  $\mathbb{R}^2$ :  $(\Phi_x, \Phi_y)$ . In  $\mathbb{C}$  schreiben wir  $(a + ib)$  statt  $(a, b)$ :

$$\mathbf{grad}_z \Phi(x + iy) = \Phi_x + i\Phi_y = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x + iy) + i \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x + iy)$$

$$\mathbf{grad}_w \Psi(u + iv) = \Psi_u + i\Psi_v$$

$$\mathbf{grad} \Phi(z) = \mathbf{grad} \Psi(w) \cdot \overline{f'(z)} \quad (1. \text{ Verpflanzungssatz})$$

$$\Delta_z \Phi(z) = \Delta_w \Psi(w) \cdot |f'(z)|^2 \quad (2. \text{ Verpflanzungssatz})$$

Wegen  $f'(z) \neq 0$  folgt:  $\Delta_z \Phi(z) = 0 \iff \Delta_w \Psi(w) = 0$

Wir können also die Potentialgleichung in der einfachen Modellebene lösen und zurücktransformieren.

**Was ist ein einfaches Gebiet?** Es gibt einfache Lösungen in  
In Ringen, Streifen, Sektoren, Außerhalb/innerhalb eines Kreises

## Beispiel: Gegeben

Kreisscheibe  $\tilde{K}_1 : |z - i| \leq 1$ ,  
elektrostatisches Potential = 0 auf Rand  $\tilde{K}_1$

Kreisscheibe  $\tilde{K}_2 : |z + i| \leq 1$ ,  
elektrostatisches Potential = 1 auf Rand  $\tilde{K}_2$

Im Punkt 0 seien die Kreisscheiben gegeneinander isoliert.

Zur Bestimmung des induzierten elektrostatischen Potentials und der Feldstärke soll das Gebiet außerhalb der Kreisscheiben bijektiv und konform auf einen Ring oder einen Streifen abgebildet werden.

Welche der beiden Transformationen (Ring bzw. Streifen) ist möglich?

Geben Sie eine Transformation an, die das gewünschte leistet.

## Lösung:

Transformation auf einen Ring:

Transformation auf Streifen  $\longleftrightarrow$

Zwei Kreise auf zwei parallele Geraden geht mit ?

Schnittpunkt der Kreise  $\longrightarrow$  Schnittpunkt der Geraden = ?

Also  $T(0) =$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit:  $T(z) = \frac{az+b}{z}$ .

Wegen  $0 \in \mathbb{R} \cap i\mathbb{R}$  sind

$T(\mathbb{R})$  und  $T(i\mathbb{R})$

$$\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0, \infty\}$$

$$T(\mathbb{R}) \cap T(i\mathbb{R}) = \{\infty, \dots\}$$

Also:  $T(z) = \frac{b}{z}$

Mit  $b \in \mathbb{R}$  folgt:  $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  und  $T(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$ .

Wir wählen  $T(z) = \frac{1}{z}$ .

Kreise symmetrisch zu  $i\mathbb{R}$

$\implies$  Bildgeraden symmetrisch zu  $T(i\mathbb{R})$

$\implies$  Bildgeraden parallel zu  $\mathbb{R}$ .

$$T(2i) = -i/2 \text{ und } T(-2i) = i/2.$$

$T(K_1) = \text{Gerade mit } \text{Im}(z) = -1/2 \quad \text{und}$

$T(K_2) = \text{Gerade mit } \text{Im}(z) = 1/2$

$T(\infty) = 0 \implies$  Das Äußere der beiden Kreisscheiben geht in den Streifen zwischen den beiden Geraden über.

Lösung Potentialproblem: Problem in der physikalischen Ebene:

$$\Delta(\Phi) = 0 \quad \text{Außerhalb der beiden Kreise,}$$

$$\Phi(z) = 0 \quad \text{für } |z - i| = 1,$$

$$\Phi(z) = 1 \quad \text{für } |z + i| = 1.$$

Problem in der Model-Ebene:

$$\Delta(\Psi) = 0 \quad \text{für } -\frac{1}{2} < \operatorname{Im}(w) < \frac{1}{2}$$

$$\Psi(w) = 0 \quad \text{für } \operatorname{Im}(w) = -\frac{1}{2},$$

$$\Psi(w) = 1 \quad \text{für } \operatorname{Im}(w) = \frac{1}{2}.$$



Damit entspricht  $\Psi$  dem elektrostatischen Potential zwischen zwei parallelen Platten. Da die Daten auf den Geraden konstant sind, wählen wir den

$$\text{Ansatz } \Psi(w) = \Psi(u + iv) = g(v).$$

$$\text{Einsetzen in DGL ergibt: } g''(v) = 0 \implies g(v) = a + bv$$

$$\text{Randdaten: } g(-\frac{1}{2}) = 0 \text{ und } g(\frac{1}{2}) = 1$$

$$\implies a - \frac{b}{2} = 0 \text{ und } a + \frac{b}{2} = 1$$

$$b = 1, a = \frac{1}{2},$$

$$g(v) = v + \frac{1}{2}$$

$$\Psi(w) = \Psi(u + iv) = \frac{1}{2} + v = \frac{1}{2} + \text{Im}(w)$$

Das gesuchte Potential im physikalischen Raum erhalten wir durch Rücktransformation:

$$\Phi(x, y) = \Psi(T(z)) = \frac{1}{2} + \text{Im}(T(z)) =$$

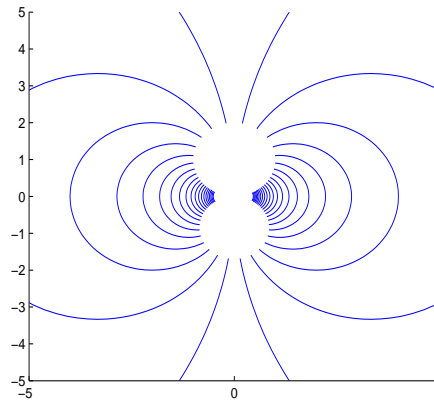
Für die Feldstärke gilt dann

$$E = -\mathbf{grad}(\Phi) = -\Phi_x - i\Phi_y = -\mathbf{grad}(\Psi(T(z))\overline{T'(z)}). \text{ Also}$$

$$E(z) = -\mathbf{grad} \Psi\left(\frac{1}{z}\right) \overline{\left(\frac{-1}{z^2}\right)} = -i \cdot \left(\frac{-1}{\bar{z}^2}\right) = i \cdot \left(\frac{z^2}{|z|^4}\right)$$

Oder durch direktes Ableiten von  $\Phi$ :

$$E = -\mathbf{grad}(\Phi) = -\Phi_x - i\Phi_y = \left( \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$



Tipps zur Hausaufgabe:

# Komplexe Kurvenintegrale

Gegeben:

Gebiet  $G$ ,  $D \subset G \subset \mathbb{C}$ ,

Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig,

Eine stückweise  $C^1$ -Kurve:  $c : [a, b] \rightarrow D$ .

Falls für beliebige Zerlegung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ,  $\hat{z}_k = c(\tau_k)$ ,  
 $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$  der Grenzwert von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\hat{z}_k)(z_k - z_{k-1})$$

existiert definiere: das komplexe Kurvenintegral von  $f$  längs  $c$  als

$$\int_c f(z) dz := \int_a^b f(c(t)) \cdot \dot{c}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\hat{z}_k)(z_k - z_{k-1})$$

Mit  $-c$  bezeichnet man die entgegengesetzt durchlaufene Kurve. Es gilt

$$\int_{-c} f(z)dz = - \int_c f(z)dz$$

Mit  $-c$  bezeichnen wir also NICHT  $\hat{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \hat{c}(t) = -c(t)$ .

**Beispiel 1)**  $f(z) := z^{1/2}$  längs Einheitskreis von  $-i$  nach  $i$ , positiv orientiert

$$c(t) = \quad t \in \quad \dot{c}(t) =$$

$$f(c(t)) =$$

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(c(t)) \cdot \dot{c}(t)dt =$$

Andersherum durchlaufen:

$$\tilde{c} = -c, \quad \tilde{c}(t) = e^{-it}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \dot{\tilde{c}}(t) = -ie^{-it}$$

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{c}} f(z) dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-it}{2}} \cdot (-ie^{-it}) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -i e^{-i\frac{3}{2}t} dt = \\ &= \left[ \frac{e^{-i\frac{3}{2}t}}{\frac{3}{2}} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} [e^{-i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\frac{3\pi}{4}}] = -\frac{2\sqrt{2}}{3} i \end{aligned}$$

$$\hat{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{c}(t) = -c(t) = -e^{it} \quad \dot{\hat{c}}(t) = -ie^{it} \quad f(\hat{c}(t)) = i \cdot e^{\frac{it}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \int_{\hat{c}} f(z) dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ie^{\frac{it}{2}} \cdot (-ie^{it}) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{3}{2}t} dt = \\ &= \left[ \frac{e^{i\frac{3}{2}t}}{i\frac{3}{2}} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2i}{3} [e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{-i\frac{3\pi}{4}}] = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

## Beispiel 2) Wegabhängigkeit

$f(z) = |z|$ , von  $z_0 = -1 - i$  bis  $z_1 = 1 + i$

i) längs der geradlinigen Verbindung

$c[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $c(t) := (1 + i)t$ ,  $t \in [-1, 1]$ .

$$\dot{c}(t) = 1 + i, \quad f(c(t)) = |t + it| = \sqrt{t^2 + t^2}$$

$$\begin{aligned} \int_c f(z) dz &:= \int_{-1}^1 f((1 + i)t) \cdot (1 + i) dt \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{2t^2} \cdot (1 + i) dt = \sqrt{2} (1 + i) \int_{-1}^1 \sqrt{t^2} dt \\ &= \sqrt{2} (1 + i) \int_{-1}^1 |t| dt = 2\sqrt{2} (1 + i) \int_0^1 t dt = \sqrt{2} (1 + i) \end{aligned}$$

ii) Längs des Kreises mit Radius  $\sqrt{2}$  um Null, positiv orientiert

$$f(z) = |z|, \tilde{c} : \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{C}, \tilde{c}(t) := \sqrt{2}e^{it}$$

Beachte:  $f$ , Anfangspunkt und Endpunkt sind wie oben!

$$\dot{\tilde{c}}(t) = \quad f(\tilde{c}(t)) =$$

$$\int_{\tilde{c}} f(z) dz = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\tilde{c}(t)) \cdot \dot{\tilde{c}}(t) dt =$$

$$= 2 \left[ e^{it} \right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 \left[ e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{-\frac{i3\pi}{4}} \right]$$

$$= 2 \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = 2\sqrt{2} (1 + i)$$

**Das komplexe Kurvenintegral (ist wie schon das reelle) i. A. wegabhängig.**

# Hauptsatz, Stammfunktionen (Seite 100-103 Skript)

Sei  $D(f)$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $G$  und  $f$  analytisch in  $G$ .  
 $c$  geschlossene stkw.  $C^1$  Kurve in  $G$ . Dann gilt der Cauchysche Integralsatz

$$\oint_c f(z)dz = 0 \quad (\text{CIS})$$

**Folgerung:**  $\int_{z_0}^z f(z)dz$  ist wegunabhängig!

$\implies$  Es gibt Stammfunktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^z f(\hat{z})d\hat{z}$$

mit  $F'(z) = f(z)$  und  $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$ .



Und was heißt **einfach zusammenhängend**?

$G$  hat keine Löcher

Jeder geschlossene Weg läßt sich in  $G$  stetig auf einen Punkt zusammenziehen  
(ist **Nullhomotop**)

**CIS** gilt auch, wenn  $G$  nicht einfach zusammenhängend ist,  
aber  $c$  in  $G$  nullhomotop ist.

**Beispiel 3:**  $f(z) := \frac{z^2 - 2z}{z - 2} + \frac{1}{z}$  längs Einheitskreis

$z = 2$  liegt nicht im Einheitskreis und nicht auf dem Integrationsweg. Also gilt

$$f(z) =$$

$$c(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \dot{c}(t) = i e^{it}$$

$$\oint_c f(z) dz = \oint_c z + \frac{1}{z} dz = \oint_c z dz + \oint_c \frac{1}{z} dz$$

$$= 0 + \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot i e^{it} dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

**Beispiel 4:** Berechnen Sie  $\int_{c_1} \frac{\ln(z)}{z} dz$

$c_1$  := mathematisch positiv durchlaufener Halbkreis  $|z| = 1$ ,  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$

### 1. Möglichkeit : direkt

$$\int_{c_1} \frac{\ln(z)}{z} dz, = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\ln(e^{it})}{e^{it}} ie^{it} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} it \cdot i dt =$$

### 2. Möglichkeit : Stammfunktion

$$F'(z) := \left( \frac{(\ln(z))^2}{2} \right)' = \frac{\ln(z)}{z} = f(z).$$

$f$  : nicht analytisch in  $\mathbb{C}$ , auch nicht um den ganzen Einheitskreis herum, aber analytisch in einem zusammenhängenden Gebiet, welches die Kurve  $c_1$  enthält,

daher gilt

$$\begin{aligned}\int_{c_1} \frac{\ln(z)}{z} dz &= F(c_1(\pi/2)) - F(c_1(-\pi/2)) = \frac{(\ln(e^{i\pi/2}))^2}{2} - \frac{(\ln(e^{-i\pi/2}))^2}{2} \\ &= \frac{(i\pi/2)^2}{2} - \frac{(-i\pi/2)^2}{2} = 0.\end{aligned}$$

**Homotopie:** Zwei geschlossene, ein mal mathematisch positiv durchlaufene Kurven  $C$  und  $\tilde{C}$  in einem Gebiet  $G$  heißen homotop, wenn sie in  $G$  stetig und ohne sie aufschneiden zu müssen ineinander verformbar sind.

Seite 107 Vorlesung:

Sei  $D$  zweifach zusammenhängend (ein Loch).

Sind  $C$  und  $\tilde{C}$  zwei geschlossene, in  $D \setminus \text{Loch}$  (also wo  $f$  analytisch ist) homotope stückweise  $C^1$  Kurven, dann gilt

$$\int_C f(z) dz = \int_{\tilde{C}} f(z) dz$$

## Die wohl wichtigsten Integrale für uns:

Sei  $C$  der positiv orientierte Kreis mit Radius 1 um einen Punkt  $z_0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \int_C (z - z_0)^n dz, &= \int_0^{2\pi} (z_0 + e^{it} - z_0)^n i e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i e^{i(n+1)t} dt = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ \left[ \frac{e^{i(n+1)t}}{n+1} \right]_0^{2\pi} = 0 & n \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Homotopie: für jede einfach geschlossene (=doppelpunktfreie) Kurve  $\Gamma$ , die  $z_0$  einmal positiv umläuft gilt

$$\int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz, = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

**Beispiel:** Das Integral von  $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-2a)}$ ,  $a \neq 0$  über einer einmal durchlaufenen  $\infty$ -Schleife kann, sofern definiert, nur die Werte  $0$ ,  $\pm \frac{2\pi i}{a}$ ,  $\pm \frac{4\pi i}{a}$  annehmen.

**Begründung:**

$$\text{PBZ: } f(z) = \frac{\alpha}{z-2a} + \frac{\beta}{z-a}$$

$$\alpha(z-a) + \beta(z-2a) = 1 \implies \alpha = -\beta = \frac{1}{a}$$

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C \frac{\frac{1}{a}}{z-2a} - \frac{\frac{1}{a}}{z-a} \\ &= \frac{1}{a} \left( \int_C \frac{1}{z-2a} dz - \int_C \frac{1}{z-a} dz \right) \\ &= \frac{1}{a} \left( \int_{C_1} \frac{1}{z-2a} dz + \int_{C_2} \frac{1}{z-2a} dz - \int_{C_1} \frac{1}{z-a} dz - \int_{C_2} \frac{1}{z-a} dz \right) \end{aligned}$$

# Taylor-Reihen

Wie schon in  $\mathbb{R}$  gilt

$$T(z; f, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

wobei  $C$  den Punkt  $z_0$  ein Mal positiv umläuft.

Die Reihe konvergiert in der größten offenen Kreisscheibe um  $z_0$ , in der  $f$  analytisch ist,  
**gegen  $f$ .**



### Beispiel a) Taylor-Reihe der Funktion

$$f : z \rightarrow \frac{2}{3 + 4z}, \quad \text{mit } z_0 = 1.$$

Taylor-Reihe: Verwende geometrische Reihe mit Ziel  $(z - z_0)$  Potenzen!

Geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$

konvergiert genau dann, wenn  $|q| < 1$ .

Reihe berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3 + 4z} &= \frac{2}{3 + 4(z - 1) + 4} = 2 \cdot \frac{1}{7 + 4(z - 1)} \\ &= \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{7}(z - 1)} = \frac{2}{7} \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{4}{7}(z - 1) \right)^k \end{aligned}$$

konvergent für  $\left| \frac{4}{7}(z - 1) \right| < 1$ . Also  $|z - 1| < \frac{7}{4} = r$

## Radius berechnen ohne Reihe zu kennen:

Reihe konvergiert im größten Kreis um  $z_0$ , in dem  $f$  analytisch ist, gegen  $f$  (nicht gegen irgendwas!)

$$f : z \rightarrow \frac{2}{3 + 4z}, \quad \text{mit } z_0 = 1.$$

Nenner Nullstelle:  $3 + 4z = 0 \implies z = -\frac{3}{4}$

Konvergenz liegt vor für  $|z - z_0| < |z_0 - \frac{-3}{4}| = \frac{7}{4}$ .

### Beispiel b)

$$g(z) := \frac{1}{\ln(3 - z)} \quad z_0 = 0$$

$$\tilde{g}(z) := \frac{1}{\ln(3 + 2i - z)} \quad z_0 = 3$$

**Beispiel c)** Die Taylor-Reihe der Funktion  $f(z) := \frac{2}{e^{4z} + 4}$  mit  $z_0 = 0$  konvergiert in der größten Kreisscheibe um Null, in dem

$e^{4z} \neq -4$  gilt, gegen  $f$ .

$$e^{4z} = e^{4x} \cdot e^{4yi} = -4 = 4e^{i\pi} \iff$$

$$|e^{4z}| = |e^{4x}| = e^{4x} \stackrel{!}{=} |-4| \implies 4x = \ln(4) \implies x = \frac{\ln(4)}{4}$$

und

$$e^{4yi} \stackrel{!}{=} e^{i\pi} \implies 4y = \pi + 2k\pi \implies y = \frac{(2k+1)\pi}{4}$$

Konvergenzradius  $r =$

**Man muss also die Reihen nicht berechnen, um die Konvergenzradien zu erhalten!**