Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2024

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 4 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Möbius-Transformation, Differenzierbarkeit

Möbius-Transformation

$$T: \, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad \neq bc, \quad c \neq 0$$

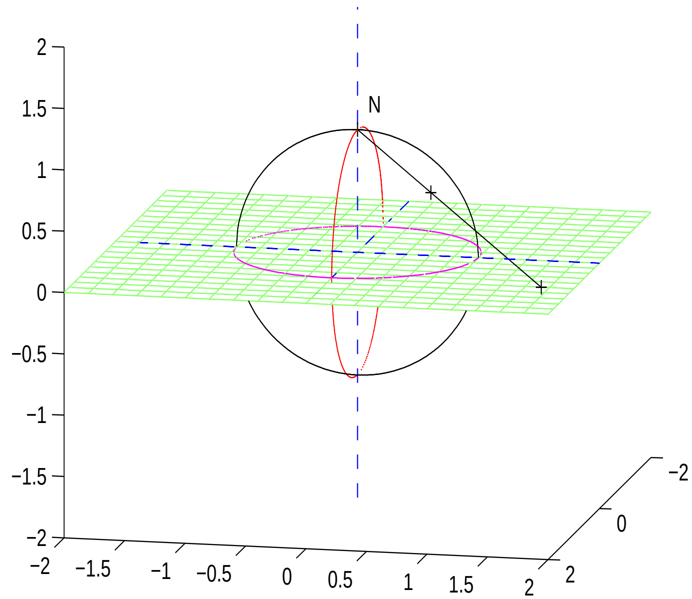
Aus der Vorlesung:

Zur Untersuchung dieser Funktionen betrachte die stereographische Projektion:

$S_2 :=$ die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3 =$ Riemannsche Zahlenkugel

$$S_2 := X = (X_1, \, X_2, \, X_3\,) \in \, \mathbb{R}^3 : \, \|X\|_2 \, = \, 1$$

wird auf die Ebene $(X_1, \, X_2)$ abgebildet und diese wiederum wird mit $\mathbb{C}^* \, := \mathbb{C} \, \cup \, \infty$ identifiziert.

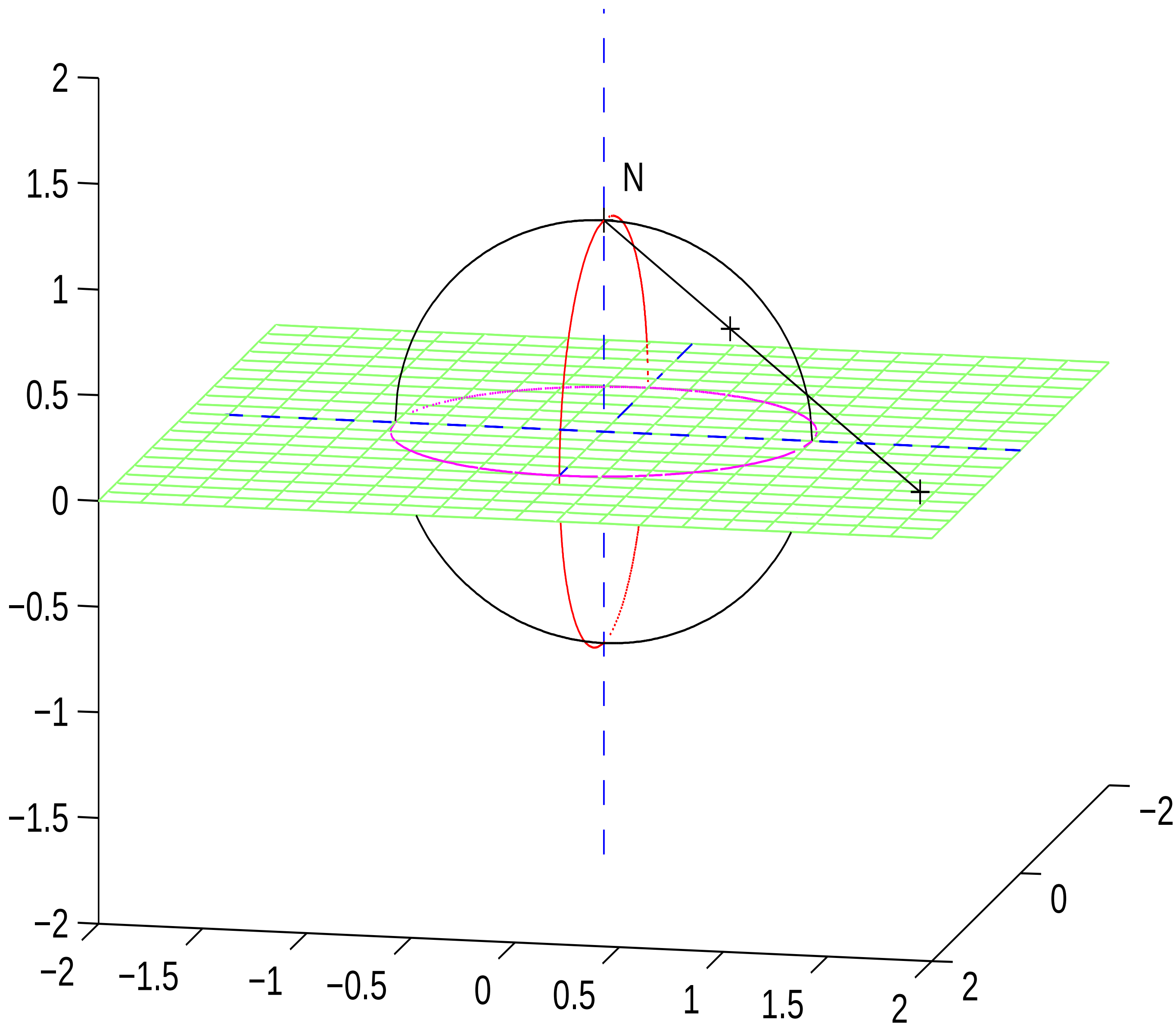


Nordpol der Kugel $=: N \ = (0, 0, 1)^T$

Abbildungsvorschrift: bestimme den Schnittpunkt $(x, y)^T$ der Geraden durch X und N mit der X_1, X_2 –Ebene bzw. mit C^*.

Bijektive Abbildung $P: \ S_2 \setminus \{N\} \ \rightarrow \ \mathbb{C}$

Durch Festlegung $P(N) =: \infty$, bijektive Abbildung $P: \ S_2 \ \rightarrow \ \mathbb{C}^*$.


N
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
−2
0
2

Gerade in $\mathbb{C}^* \longleftrightarrow$ Kreis auf S_2 der durch N geht!
Ebene durch N geschnitten mit Kugeloberfläche S_2

Kreis in $\mathbb{C}^* \longleftrightarrow$ Kreis auf S_2 der nicht durch N geht!
Kegel mit Spitze in N geschnitten mit Kugeloberfläche S_2

„Kreis“ := Verallgemeinerter Kreis = Kreis oder Gerade

Verallgemeinerte Kreise werden durch die Möbius-Transformation auf verallgemeinerte Kreise abgebildet.

Eigenschaften der Möbius-Transformation

$$T:\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad \neq bc, \quad c \neq 0$$

$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \infty, \qquad T(\infty) := \frac{a}{c}, \qquad T(-\frac{d}{c}) := \infty.$

Verallgemeinerte Kreise : Kreise oder Geraden in $\mathbb{C}^*$

Kreistreue:

$-\frac{d}{c} \in$ „Kreis" $\Longrightarrow T($„Kreis"$) =$ Gerade

$-\frac{d}{c} \notin$ „Kreis" $\Longrightarrow T($„Kreis"$) =$ echter Kreis

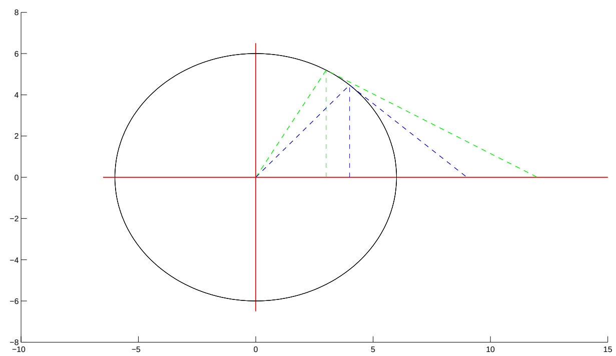
Kreissymmetrie : Symmetrien bzgl. „Kreise" bleiben erhalten

Symmetrie bzgl. einer Gerade : klar (Spiegelung)
Skizze:

z, z' symmetrisch bzgl. Kreis mit Radius R und Mittelpunkt M $\Longleftrightarrow$

$\big[\, z$, z' liegen auf einem von M ausgehenden Strahl und

$|z - M| \cdot |z' - M| \;=\; R^2\big] \Longleftrightarrow (z - M) \cdot (\bar{z}' - \bar{M}) \;=\; R^2$



Mittelpunkt M von Kreis K und ∞ sind symmetr. bzgl. K

Denn: $\quad z \to M \quad \Longrightarrow \quad |z - M| \to 0 \Longrightarrow \quad |z' - M| \to \infty$

Für jede Möbius-Transformation T gilt daher:

$T(M), T(\infty)$ **sind symmetrisch bzgl. Bild„kreis“** $T(K)$**.**

Dreipunktrelation:

Nach Vorlesung Folie 54/55 gilt für $w = T(z)$ und drei Punktepaaren

$w_j = T(z_j)$, $j = 1, 2, 3$:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Beispiel: Gesucht Möbius Transformation mit

$$T(1) = -i, \qquad T(i) = 0, \qquad T(2i) = \frac{1}{3}\,.$$

$$\frac{w - (-i)}{w - 0} : \frac{\frac{1}{3} - (-i)}{\frac{1}{3} - 0} = \frac{z - 1}{z - i} : \frac{2i - 1}{2i - i}$$

Auflösen nach w ergibt: $T(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$.

Beispiel:

a) Bestimmen Sie eine Möbius–Transformation $T : z \to w$ mit

$T(2i) = 0$, $T(-2i) = \infty$, $T(0) = 1.$

b) Welches sind die Bilder von

(i) $i\mathbb{R}$,

(ii) $\mathbb{R}$,

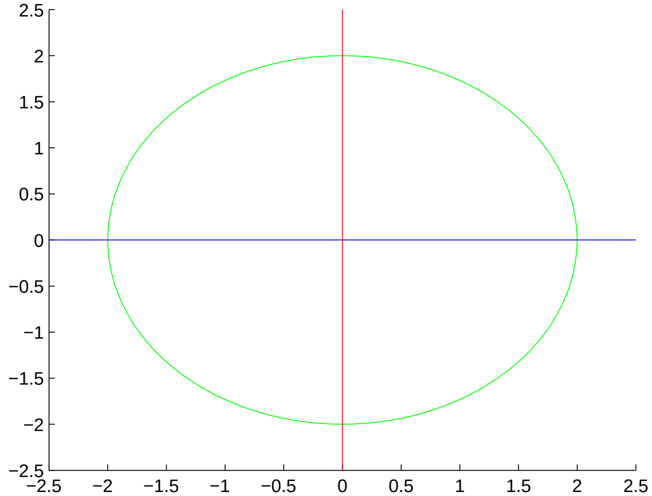
(iii) $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$,

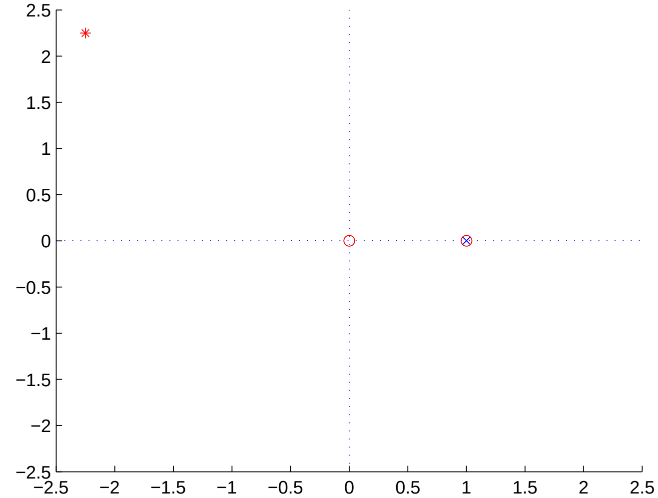
(iv) $g := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = -1\}$

(v) $Q := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x, y > 0\}$

(vi) $|z| \leq 8$?

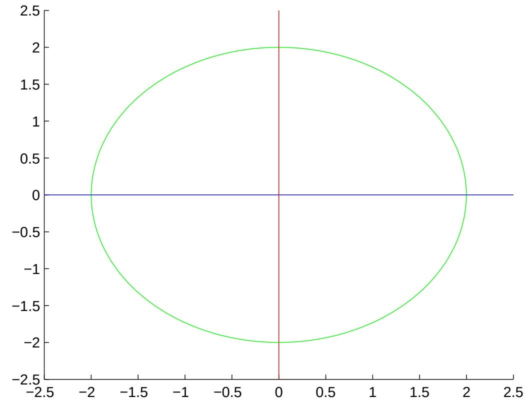
a) $$T(z) = \frac{2i - z}{2i + z} \cdot$$

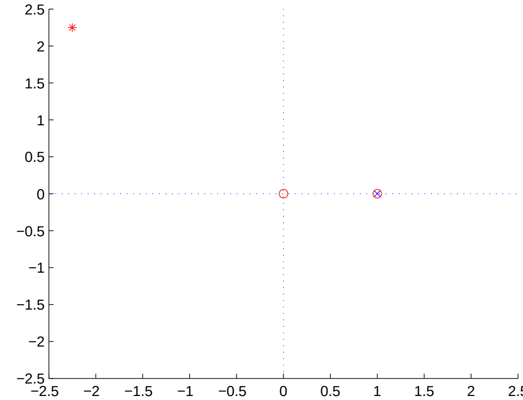




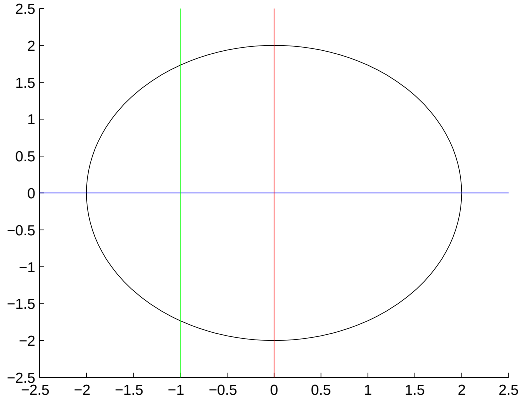
b)(i) Bild von $i\mathbb{R}$:

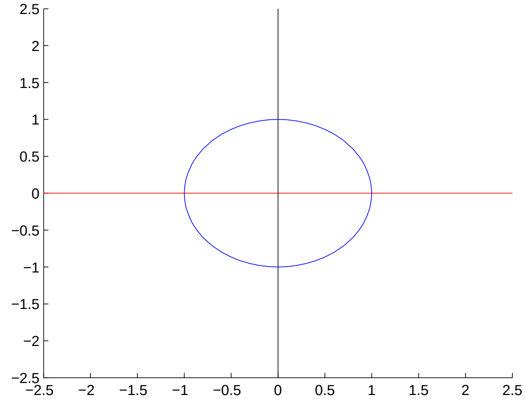
(ii) Bild von $\mathbb{R}$:





(iii) Bild des Kreises $|z| = 2$:





(iv) Bild der Gerade $g:\ \operatorname{Re} z = -1$.
$-2i$ liegt nicht auf $g \Longrightarrow$ Das Bild ist ein echter Kreis.

Im Bildraum sind ∞ und der Mittelpunkt M des Bildkreises symmetrisch bzgl. des Bildkreises.

Es gilt $T^{-1}(\infty) = -2i\cdot$

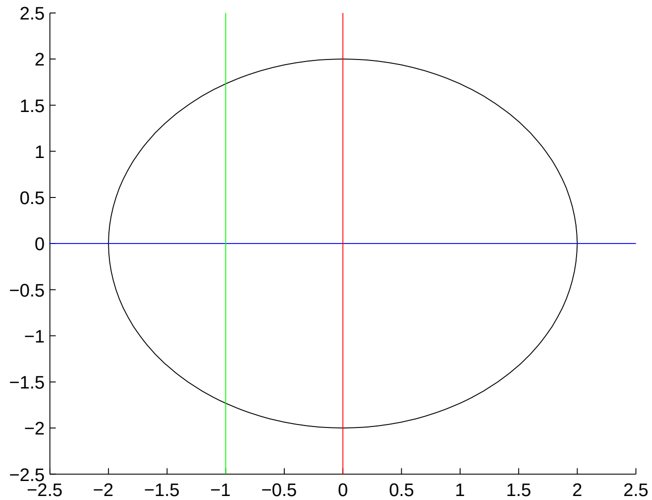
$\Longrightarrow T^{-1}(M) =$?

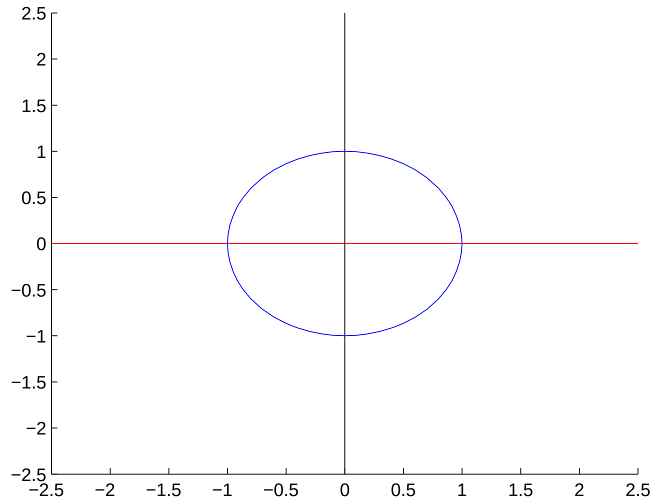
$\Longrightarrow\ M =$

(v) Bild von $Q := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x, y > 0\}$:

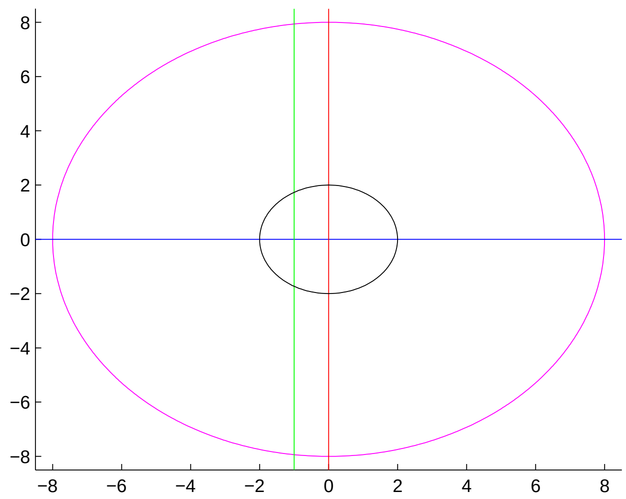
$$T(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}\,, \qquad T(-2-2i) = -1-2i$$

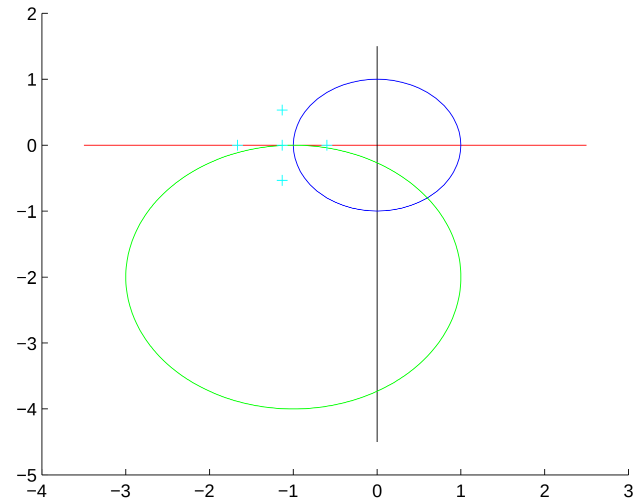
$$T(\mathbb{R}) = \text{ Einheitskreis,} \qquad T(2i) = 0$$





(vi) Bild von $|z| \le 8$: Das Bild von $|z| = 8$ ist ein echter Kreis symmetrisch zu $\mathbb{R}$, da Urbild symmetrisch zu $i\mathbb{R}$.





$$T(8i) = -\frac{3}{5}, \qquad T(-8i) = -\frac{5}{3}$$

erhält man den Mittelpunkt M und den Radius R:

$$M = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5} - \frac{5}{3}\right) = -\frac{17}{15} \qquad R = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5} + \frac{5}{3}\right) = \frac{8}{15}.$$

$T(0) = 1 \Longrightarrow$ Innere des Kreises $|z| \le 8$ auf das Äußere des Bildkreises.

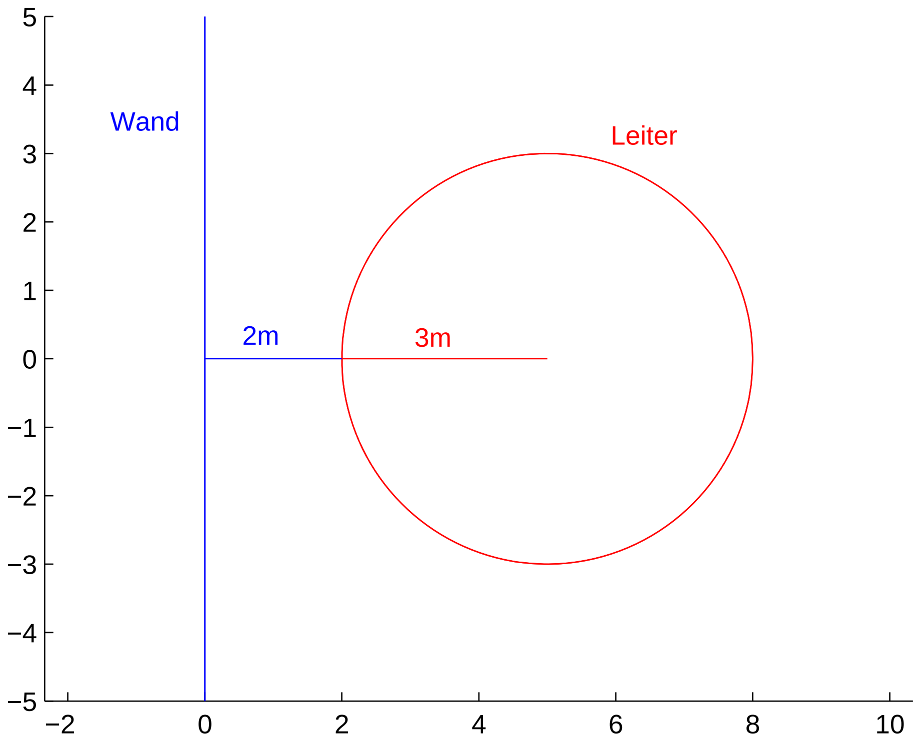
Bei Potential Problemen ist oft das Ziel die

Transformationen auf Ringe, Streifen, Sektoren

Was geht bei folgend en Urbildern mittels Möbius?

- Kreis und Gerade, die sich in einem Punkt berühren
- Zwei Kreise mit zwei Schnittpunkte
- Kreis und Gerade, die sich nicht berühren
- Zwei Kreise, die sich nicht berühren

Beispiel 1) Ziel: Kreis und Gerade auf Ring mit Mittelpunkt Null



$g =$ imaginäre Achse, $K =$ Kreis mit Mittelpunkt $C = 5$ und $R = 3$

Gewünschtes Bild: Konzentrische Kreise K_1, K_2 mit Mittelpunkt $M = 0$.

Im Bild sind M, und ∞ symmetrisch bzgl. $K_1 := T(i\mathbb{R})$ und $K_2 := T(K)$

$\Longrightarrow$ $T^{-1}(M)$, $T^{-1}(\infty)$ müssen

symmetrisch bzgl. $i\mathbb{R}$ und K sein!

$$\overset{\text{Skizze}}{\Longrightarrow} \; p := T^{-1}(M) = -T^{-1}(\infty) \in \mathbb{R}$$

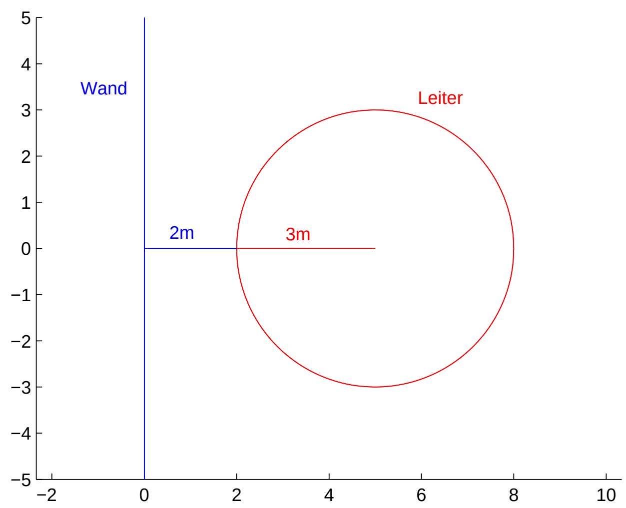
und

$$(p - C)\overline{(-p - C)} = C^2 - p^2 = 25 - p^2 \overset{!}{=} R^2 = 9.$$

Die Punkte $z_1 = -4$ und $z_2 = 4$ sind also symmetrisch bzgl. g und K.

Definiere $\boxed{T(z) = \dfrac{z-4}{z+4}}$

Nun überzeugen wir uns davon, dass T das gewünschte leistet



$$T(z) = \frac{z-4}{z+4}$$

$-4 \notin g$, $-4 \notin K \implies$ Bilder echte Kreise $K_{1,2}$ mit Mittelpunkten $M_{1,2}$

Wegen $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und Symmetrien: $M_{1,2} \in \mathbb{R}$

$T(0) =$ $\qquad$ $T(\infty) =$ $\qquad \implies$

$T(2) =$ $\qquad$ $T(8) =$ $\qquad \implies$

$T(1) =$

$T($ Raum zwischen Wand und Leiter $) =$

Beispiel 2: Zwei Kreise auf Ring um Null (vgl. Hausaufgabe 3)

Wieder im Bild $M = 0$ und ∞ symm. zu beiden Bildkreisen

Gesucht im Urbild:
Punkte, die zu zwei Kreisen symmetrisch sind (vgl. Vorlesung Seite 60/61)

Beispiel: $K_1 : |z + i| = 1$ und $K_2 : |z - 4i| = 2$

Finde p und p' symmetrisch zu beiden Kreisen K_1 und K_2

Definiere $T(z) := \frac{z-p}{z-p'}$

Symmetrie bzgl. K_1 und $K_2 \Longrightarrow$

Punkte müssen auf einem Strahl ausgehend von $M_1 = -i$,
und auf einem Strahl ausgehend von $M_2 = 4i$ liegen.

Sie liegen also auf $i\mathbb{R}$

$p = i\beta \in i\mathbb{R}$ und $p' = ib \in i\mathbb{R}$.

Wegen der Kreissymmetrie muss gelten:

$$K_1 : (p - M_1)\overline{(p' - M_1)} = R_1^2, \qquad M_1 = -i,\ R_1 = 1$$

$$(i\beta + i)\overline{(ib + i)} \ = \ 1^2$$

und analog für K_2 mit $M_2 = 4i$, $R_2 = 2$

$$(i\beta - 4i)\overline{(ib - 4i)} \ = \ 4$$

$\longrightarrow$ zwei Gleichungen für β und b:

$\Longrightarrow \ \beta + b + \beta b = 0$ und $-4(\beta + b) + \beta b + 12 = 0\,.$

Auflösen ergibt: $b \ = \ \dfrac{6 + 4\sqrt{6}}{5} \ \approx \ 3.1596 \ \wedge \ \beta \ = \ 2.4 - b \ \approx \ -0.7596.$

Differenzierbarkeit

Für den Rest der HÜ: Wenn nicht ausdrücklich anders erklärt:

G: Gebiet in $\mathbb{C}$, also offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

$i^2 = -1, \quad z = x + iy = re^{i\phi}, \qquad x, y, r, \phi \in \mathbb{R}$

$f : G \to \mathbb{C},\ f : z \mapsto f(z) = w = u + iv = \rho e^{i\alpha}, \qquad u, v, \rho, \alpha \in \mathbb{R}.$

Also $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Komplexe Differenzierbarkeit: f heißt in z_0 komplex diff.bar, falls

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert.

analytisch/ holomorph/ regulär in G : in ganz G komplex diff.bar.

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen (CR-DGL'n) :

Seien u und v in einer Umgebung von z_0 partiell diffbar nach x und y. Dann:

f in z_0 kompl. diffbar $\Longleftrightarrow$ in z_0 gelten die (CR-DGL'n)

$$\boxed{u_x = v_y\,, \quad v_x = -u_y}$$

Dann gilt

$$\boxed{f'(z_0) = u_x(z_0) + i \cdot v_x(z_0)}$$

Zur Erinnerung: Differenzierbarkeit= hinreichend gute Approximierbarkeit durch lineare Funktionen (= Drehstreckungen)

In $\mathbb{C}$: $f(z) \;=\; u(x,y) \;+\; i\,v(x,y)$

$$\text{Im } \mathbb{R}^2 : \qquad \tilde{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \Longrightarrow J\tilde{f}(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Drehstreckung im $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit

$$\boldsymbol{A} \;=\; \begin{pmatrix} k\cos(\alpha) & -k\sin(\alpha) \\ k\sin(\alpha) & k\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Definitionen:

Winkeltreue einer Funktion f: Für alle $z_0 \in G$ gilt:

Winkel zwischen Kurven, die sich in z_0
schneiden bleiben bei der Abbildung
$z \mapsto w = f(z)$
(in Größe und Orientierung) erhalten.

Längentreue: Für alle $z_0 \in G$ gilt:

Alle von z_0 ausgehenden Richtungen werden bei der Abbildung
$z \mapsto w = f(z)$ *um den gleichen Faktor* $|f'(z_0)|$ *gestreckt.*

Konforme Abbildung:

f *heißt konform, wenn* f *winkel- und längentreu ist.*

Einige Eigenschaften holomorpher Funktionen:

- f ist in jedem Punkt z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$ konform.

- u und v sind $C^\infty-$ Funktionen.

- u und v sind harmonische Funktionen. Das heißt
$$\Delta u \; := \; u_{xx} + u_{yy} \; = \; 0, \qquad \Delta v = 0$$

- Ist u harmonisch ($\Delta u = 0$), so gibt es v, so dass $f = u + iv$ holomorph ist. v heißt **konjugiert harmonische Funktion**.
$$\nabla v \; = \; \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$$
Konstruiere Potential wie in Analysis III.

Vorlesung: Polynome, $\exp$, deren Kompositionen und Umkehrungen sind überall in $\mathbb{C}$ wo sie definiert sind, komplex diffbar.

$$f(z) = \sqrt{z}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Beispiele:

Beispiel 1) In welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ ist f komplex diff.bar?

- **A)** $\quad f(z) = \cos(\mathsf{Re}\,(z))$

$u =$ $\qquad v =$

$u_x =$

Die Funktion ist nur für $z = x + iy$ mit $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ komplex differenzierbar.

- **B)**

$$
\begin{aligned}
f(z) \;=\; & \mathsf{Re}\,(z) \cdot \big((\mathsf{Re}\,(z))^2 - 3(\mathsf{Im}\,(z))^2 - 1\big) \\
& + \; i \cdot \big(\mathsf{Im}\,(z) \cdot \big(3(\mathsf{Re}\,(z))^2 - (\mathsf{Im}\,(z))^2 - 1\big)\big) \\
& =
\end{aligned}
$$

Cauchy Riemannschen Dgl'n: $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$

$u_x =$

$-u_y =$

- **C)** $\quad f(z) := \bar{z}^3\,, \quad \text{arg}\,(z) \in \,]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\,],\ |z| > 0.$

Polarkoordinaten wären angenehmer. Also rechnet man mittels Kettenregel die CR-DGL'n um in

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen in Polarkoordinaten

$$\boxed{u_r \;=\; \frac{1}{r}\,v_\phi\,, \qquad v_r \;=\; -\,\frac{1}{r}\,u_\phi}$$

Damit ergibt sich für

$f(z) \;=\; \bar{z}^3 \;=\; (re^{-i\phi})^3 = r^3 \cdot e^{-i3\phi}, \qquad r \neq 0$

Also $f(z) \;=\; u + iv = \; r^3 \cdot (\cos(-3\phi) \;+\; i \cdot \sin(-3\phi))$

Faustregel: Ist man auf das explizite Auftauchen von Im , Re , $\bar{z}, |z|, \mathsf{arg}\,(z)$ in der Funktionsvorschrift angewiesen, so ist die Fkt. in der Regel nicht diffrenzierbar.

Widerspricht das nicht Beispiel B?

Beispiel 2) Bestimmen Sie alle analytischen Funktionen $f = u+iv$ mit

$$u(x+iy) = \mathsf{Re}\,(f(x+iy)) = x^2 + 2xy - y^2$$

Also: bestimmen Sie alle konjugiert harmonischen Fkt'n v zu u

$$u_x \;=\; 2x + 2y \;\stackrel{!}{=}\; v_y \;\Longleftrightarrow\; v(x,y) \;=$$

$$-u_y \;=\; -(2x - 2y) \;\stackrel{!}{=}\; v_x \;=$$

$$\Longleftrightarrow\; v(x,y) \;=\; 2xy + y^2 - x^2 + C$$

$$f(x+iy) = x^2 + 2xy - y^2 + i(-x^2 + 2xy + y^2) + iC$$

$C =$?

Bemerkung: Auch bei diesem Typ Aufgabe können Polarkoordinaten geeigneter sein:

$r \cdot u_r = v_\varphi$ und $r \cdot v_r = -u_\varphi$

Beispiel 3) Gegeben ist die Funktion

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) := e^{3x}\sin(3y) + e^{-2y}\cos(2x)\,.$$

i) Zeigen Sie, dass die Funktion u harmonisch ist, d.h.

ii) Konstruieren Sie zu u eine konjugiert harmonische Funktion v.
D.h.: Bestimmen Sie v so, dass
$f(z) = f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$
holomorph wird.