

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung zu Blatt 2 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Multiplikation, Potenzen, Exponentialfunktion

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Addition und Multiplikation im $\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}$

Zur Erinnerung: Addition

$$z = x + iy \in D \subset \mathbb{C}, \quad c = a + ib \in \mathbb{C} \text{ fest.}$$

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad f : z \mapsto z + c = (x + a) + i(y + b)$$

Geometrische Interpretation:

Die Teilmenge D der komplexen Zahlenebene wird um c verschoben.

Multiplikation

$$z = re^{i\varphi} \in D \subset \mathbb{C}, \quad c = \rho e^{i\alpha} \in \mathbb{C} \text{ fest.}$$

$$f(z) = c \cdot z = \underline{r e^{i\varphi}} \cdot \underline{\rho e^{i\alpha}} = \underline{\rho r e^{i\varphi}} e^{i\alpha} = f \cdot r e^{i(\varphi + \alpha)} = f \cdot r \cdot e^{i(\varphi + \alpha)}$$

streckung um f
Drehung um α
 \mathbb{R}_+

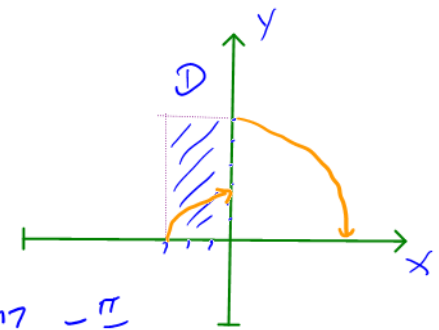
Beträge werden multipliziert. Argumente werden addiert.

Geometrische Interpretation der Multiplikation:

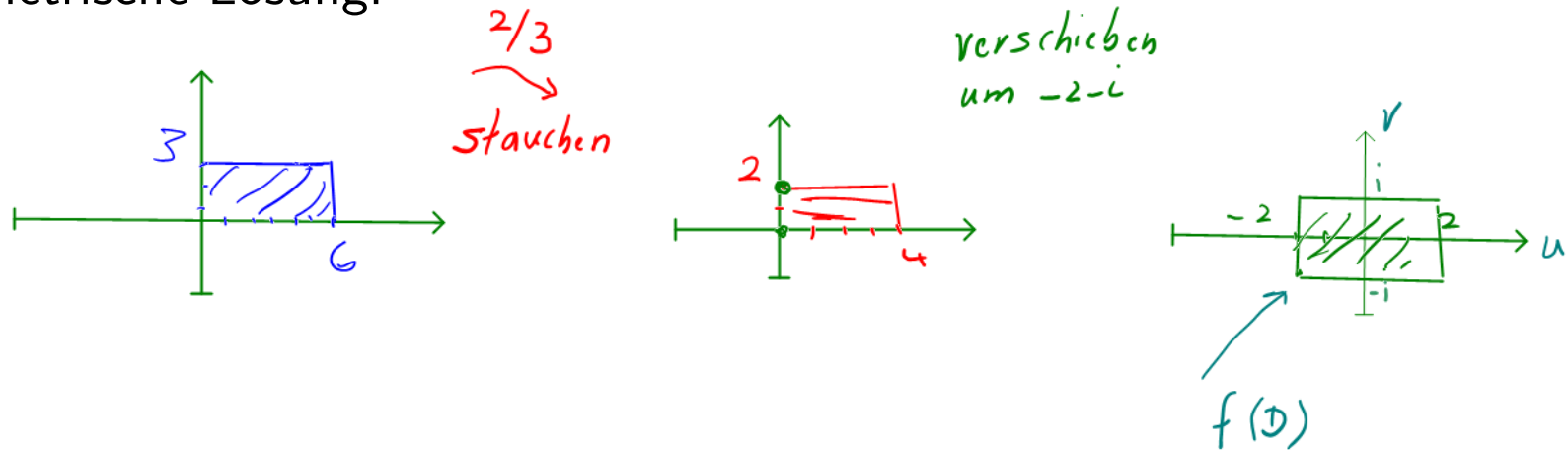
Beispiel A: Rechteck unter affin linearer Funktion

$$D := \{z \in \mathbb{C} : -3 < \operatorname{Re}(z) < 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < 6\}$$

$$f(z) := \frac{2}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}z - (2+i) \quad z \rightarrow \frac{1}{z} = e^{-i\frac{\pi}{2}}z \quad \text{Drehung um } -\frac{\pi}{2}$$



Geometrische Lösung:



Das Rechteck wird um $\frac{\pi}{2}$ in mathematisch negativer Richtung (Uhrzeigersinn) gedreht,
um den Faktor $\frac{2}{3}$ gestaucht
und um $c = -2 - i$ verschoben.

Rechnerisch:

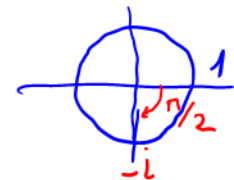
Gebe für $w = f(z) = u + iv$ bzw. $f(z) = \rho e^{i\alpha}$ Bereiche für u, v bzw. ρ, α an

$$f(z) := u + iv = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} z + 3$$

↑ kartesisch = ?

$$= \frac{2}{3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) (x + iy) - (2 + i) =$$

-i



$$= -\frac{2}{3} i (x + iy) - 2 - i$$

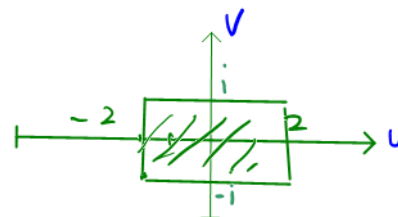
$$= -\frac{2}{3} ix + \frac{2}{3} y - 2 - i = \underbrace{\left(\frac{2}{3} y - 2\right)}_u + i \underbrace{\left(-\frac{2}{3} x - 1\right)}_v$$

$$y \in]0, 6[\Rightarrow \frac{2}{3} y \in]0, 4[$$

$$\Rightarrow u = \frac{2}{3} y - 2 \in]-0-2, 4-2[=]-2, 2[$$

$$x \in]-3, 0[\Rightarrow -\frac{2}{3} x \in]0, 2[$$

$$v = -\frac{2}{3} x - 1 \in]0-1, 2-1[=]-1, 1[$$



Geometrische Interpretation der affin linearen Funktion

$$f(z) = cz + d$$

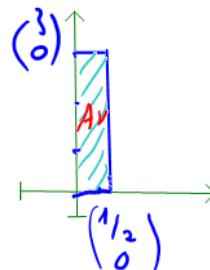
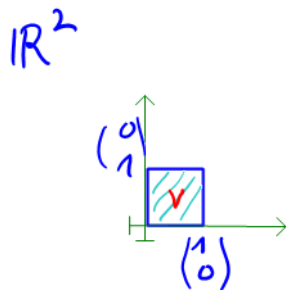
Drehstreckung + anschließender Verschiebung

Streckung ist in alle Richtungen gleich! Winkel bleiben erhalten! (Vgl. Hausaufgabe 1)

Unterschied zu linearen Abbildungen im \mathbb{R}^2 :

zum Beispiel : $v \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{2} \\ 3v_2 \end{pmatrix}$

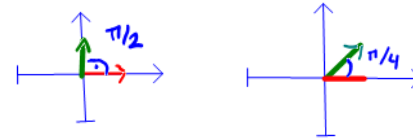
Streckung um $1/2$ in x -Richtung und um 3 in y -Richtung



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Winkel zwischen Urbildern = $\frac{\pi}{2}$,

Winkel zwischen Bildern = $\frac{\pi}{4}$.



Bei der komplexen Multiplikation $c \cdot z$ wird nur gedreht und gestreckt. Winkel bleiben erhalten!

Lineare Funktionen in \mathbb{C} können viel weniger als lineare Funktionen in \mathbb{R}^2

Zur Erinnerung: Differenzierbarkeit = hinreichend gute Approximierbarkeit durch lineare Funktionen

Differenzierbarkeit in \mathbb{C} : impliziert mehr als Diff.barkeit im \mathbb{R}^2 !

$$f(z) =: u(x, y) + i v(x, y) \stackrel{\text{lokal}}{\approx} az + b$$

$$w = f(z) = u + iv$$

$$\text{Im } \mathbb{R}^2 : \quad \tilde{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \implies J\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Drehstreckung im \mathbb{R}^2 : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k \cos(\alpha) & -k \sin(\alpha) \\ k \sin(\alpha) & k \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Später: Diffbarkeit in \mathbb{C} :

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

(Cauchy-Riemannsche DGL'n).

Beispiel B: Anderer Typ Aufgabe

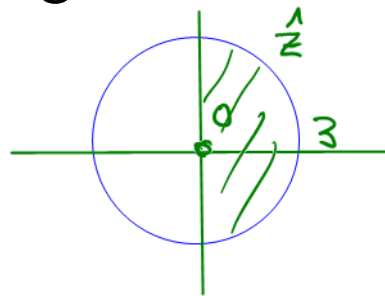
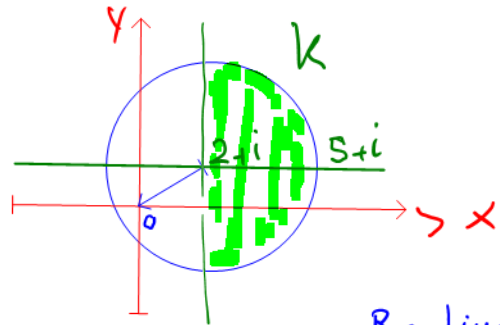
K und $f(K)$ gegeben.
 gesucht passendes f .

Die halbe Kreisscheibe

$$K := \{z \in \mathbb{C} : |z - 2 - i| < 3, \text{Re}(z) > 2\}$$

$|z - (2+i)| = 3$ Kreis $M=2+i$ $R=3$

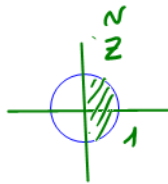
soll auf die obere Hälfte des Inneren des Einheitskreises ($|z| < 1$) transformiert werden. Wie geht das?



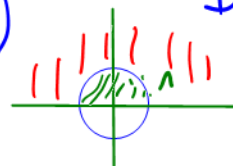
Verschiebe $M=2+i$ in Null
 $\tilde{z} = z - (2+i)$

Radius anpassen

$$\hat{z} = \frac{1}{3}(z - (2+i))$$



Drehen



$$f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}} \tilde{z} = \frac{1}{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} (z - (2+i))$$

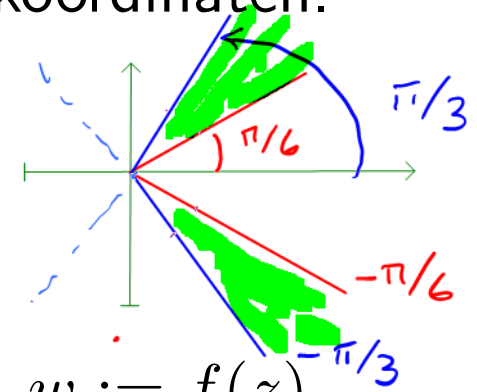
Ziel: $f(K)$

Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $w = f(z) := z^{-1}$

Punktrechnung \rightarrow wieder einfacher in Polarkoordinaten.

Beispiel C: Bild des Sektors

$$D := \{ z \in \mathbb{C} : z = re^{i\phi} : \phi \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[, r \in \mathbb{R}^+ \}$$



Sei $\rho e^{i\alpha}$ die Polarkoordinaten Darstellung von $w := f(z)$.

Dann gilt

$$\underline{w := f(z)} = \rho e^{i\alpha} = \frac{1}{re^{i\phi}} = \frac{1}{r} e^{-i\phi} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} r \in]0, \infty[\\ \frac{1}{r} \in]0, \infty[\\ \phi \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

$\alpha = -\phi \in]-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}[$

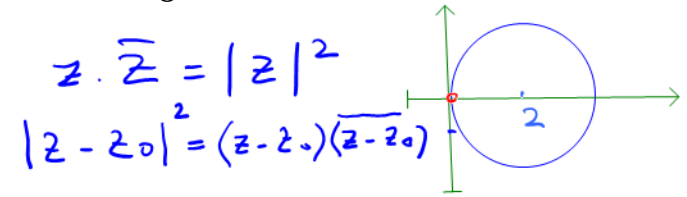
Das Bild ist der an der reellen Achse gespiegelte Sektor.

$w = u + iv$ oder $f e^{i\alpha}$ Ziel: gebe Bereiche für u, v bzw. f, α an

Beispiel D:

$D =$ Bild des Kreises mit Radius 2 um $z_0 = 2$ ohne Null.

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z - 2| = 2 \}$$



Beschreibe den Kreis ohne Betragsstriche:

$$|z - 2|^2 = (z - 2)(\overline{z - 2}) \stackrel{\text{ausm.}}{=} z\bar{z} - 2\bar{z} - 2z + 4 = 4$$

$$\iff z\bar{z} - 2\bar{z} - 2z = 0,$$

$w = \frac{1}{z}$ setze $z = \frac{1}{w}$ ein und forme um bis erkennbar ist, was wir haben:

$$\frac{1}{w} \frac{1}{\bar{w}} - 2 \frac{1}{\bar{w}} - 2 \frac{1}{w} = 0 \quad \text{multipliziere mit } w\bar{w} \neq 0$$

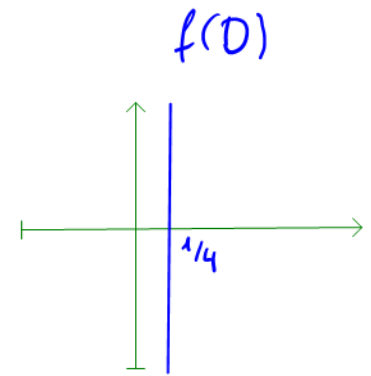
$$\iff 1 - 2w - 2\bar{w} = 0$$

$$\iff 1 - 2(w + \bar{w}) = 0$$

$$w + \bar{w} = \frac{1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} w = u + iv \\ \bar{w} = u - iv \end{array} \right\} w + \bar{w} = 2u$$

$$2\text{Re}(w) = \frac{1}{2} \implies \text{Re}(w) = \frac{1}{4}$$

$$f(D) = \{ w \in \mathbb{C} : \text{Re}(w) = \frac{1}{4} \}$$



Natürliche Potenzen/Wurzeln $z^n = (r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot (e^{i\varphi})^n$

$$\underline{z = r e^{i\varphi}} \implies \underline{z^n = r^n (e^{i\varphi})^n = r^n (e^{in\varphi}) = w}$$

$|w| = |r^n e^{in\varphi}| = r^n \cdot |e^{in\varphi}| = r^n \cdot 1 = r^n$
 Winkel = $n \cdot \varphi$

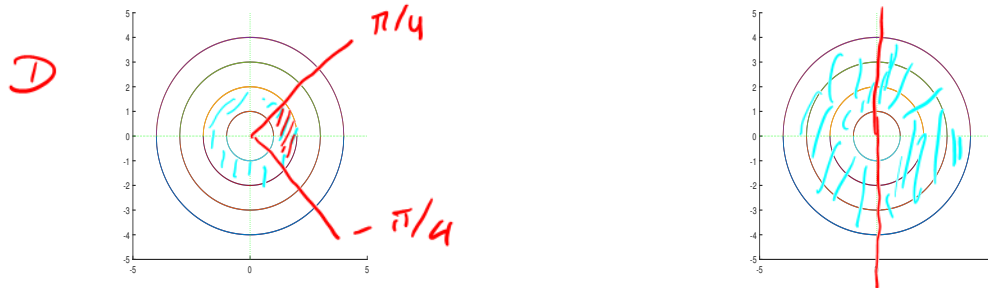
Betrag: hoch n , Winkel: mal n

Beispiel E: $D = \{z \in \mathbb{C} : z = r e^{i\varphi}, r \in [1, 2], -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}\}$

$$w = \rho e^{i\alpha} = f(z) = z^2 = (r e^{i\varphi})^2 = r^2 e^{i2\varphi}$$

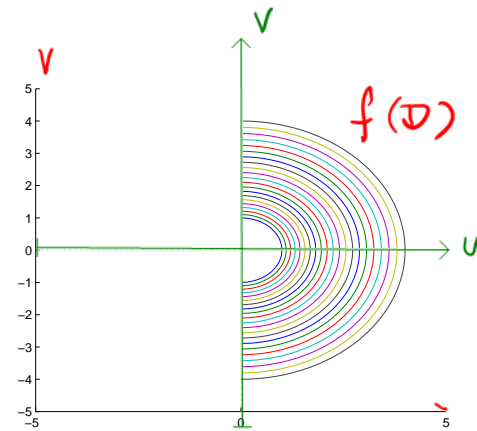
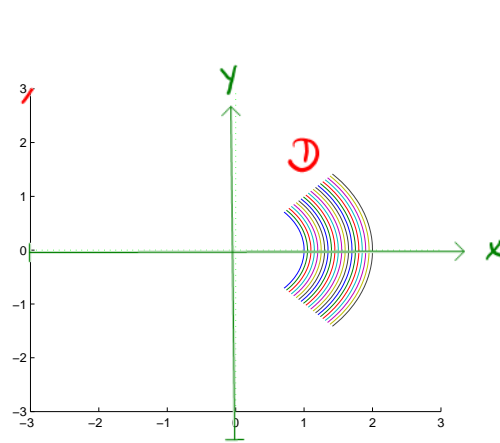
$|w| = |z^2| = r^2 \in [1^2, 2^2]$
 Winkel $w = 2\varphi \in]-\frac{\pi}{4} \cdot 2, \frac{\pi}{4} \cdot 2[$
 $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\implies |w| =$



Winkel von $(w) = \arg(w) =$

Also $\underline{f(D) = \{w \in \mathbb{C} : w = \rho e^{i\alpha}, \rho \in [1, 4], \alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\}}$



$$(re^{i\varphi})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot (e^{i\varphi})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}}$$

Umkehrung:

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}} ?$$

VORSICHT!!

Umkehrung von $w^n = z$: finde w , sodass $w^n = z$ gilt

$$\underline{w^n = z} \iff (\rho e^{i\alpha})^n \stackrel{!}{=} \underbrace{r e^{i\varphi}}_z \iff \rho^n e^{in\alpha} \stackrel{!}{=} r e^{i\varphi} \quad (\times)$$

Beträge $\left| \rho^n e^{in\alpha} \right| \stackrel{!}{=} \left| r e^{i\varphi} \right| \implies \rho^n = r$
 $\left. \begin{matrix} \rho^n = r \\ \rho^n e^{in\alpha} = r e^{i\varphi} \end{matrix} \right\} \implies e^{in\alpha} = e^{i\varphi}$

Es folgt **nicht** : $n\alpha = \varphi$, sondern

$$\rho^n = r$$

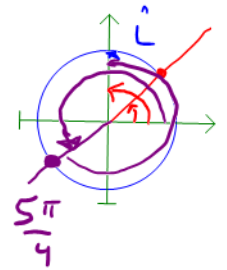
und

$$e^{in\alpha} = e^{i\varphi}$$

$$\implies n\alpha = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Beispiel F: Gesucht sind die zweiten Wurzeln aus i .



$$\underline{w} = \underline{\rho} \cdot e^{i\alpha} = \underline{\sqrt[2]{i}} \implies \underline{w^2} = \underline{i} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\left. \begin{aligned} w^2 &= \rho^2 \cdot e^{i2\alpha} \stackrel{!}{=} 1^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \\ \implies \rho^2 &= 1^2 \implies \rho = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow e^{i2\alpha} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Anschaulich:

w liegt auf dem Einheitskreis und wenn man den Winkel zu w verdoppelt landet man in i .

Rechnerisch: $\rho^2 \stackrel{!}{=} 1^2 \iff_{\rho > 0} \underline{\rho = 1}$

$e^{i2\alpha} \stackrel{!}{=} e^{i\frac{\pi}{2}} \iff 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$k=0 : \alpha = \pi/4$
 $k=1 : \alpha = 5\pi/4$
 $k=2 : \alpha = 9\pi/4$
 gleicher Punkt wie bei $k=0$

Das sind unendlich viele mögliche Darstellungen von zwei verschiedenen Punkten der komplexen Zahlenebene.

Allgemein: $n \in \mathbb{N}$, $z = re^{i\phi}$, $w := z^{\frac{1}{n}} = \rho e^{i\alpha}$

$$w^n = (\rho \cdot e^{i\alpha})^n = \rho^n \cdot e^{in\alpha} \stackrel{!}{=} |z|e^{i\phi} \iff \rho = |z|^{\frac{1}{n}} \wedge e^{in\alpha} = e^{i\phi}$$

$$\implies n\alpha = \phi + 2k\pi \iff \alpha = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

Mit $w = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

erhalten wir die n paarweise verschiedenen Punkte der \mathbb{C} -Ebene, für die $w^n = z$ gilt.

Als **Hauptwert** definiert man: $z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\phi}{n})}$, $-\pi < \phi < \pi$.

wie in \mathbb{R}

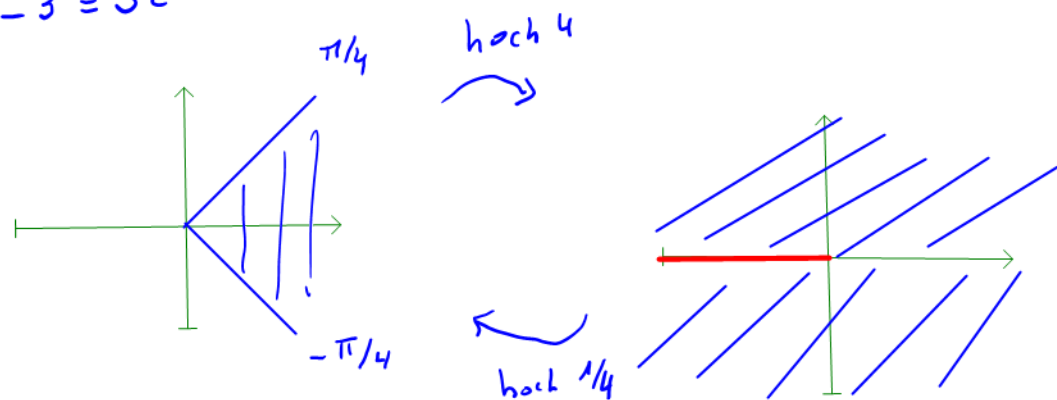
$$3^2 = 9$$

$$(-3)^2 = 9$$

$$\sqrt{9} = 3 = 3e^{i0}$$

nicht $-3 = 3e^{i\pi}$

$$\alpha \in]-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}[$$



Beispiel G: Gesucht alle Lösungen $z = re^{i\phi}$ von

c polar

$$|c|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

Winkel $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\pi}{3}$

$$c = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} z^4 = \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \cdot 81$$

\tilde{c} analog
 $|\tilde{c}| = 1$
 Winkel wegen $x < 0$
 $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$
 $= \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi$
 $= -\pi/3 + \pi$
 $= \frac{2\pi}{3}$

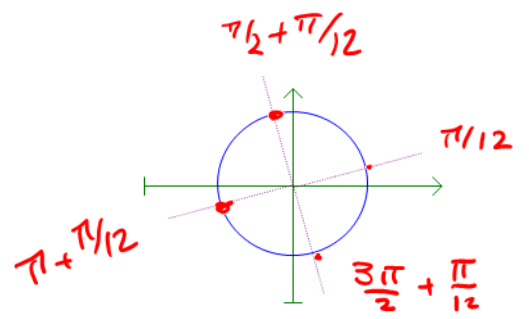
$$e^{i\frac{\pi}{3}} z^4 = 81 e^{i\frac{2\pi}{3}} \iff z^4 = r^4 e^{i4\phi} = 81 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$r^4 = |z|^4 = 81 \iff r = |z| = 3$$

$$e^{i4\phi} = e^{i\frac{\pi}{3}} \iff 4\phi = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$$

$$\{\arg(z)\} = \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12} \pm \frac{2\pi}{4}, \frac{\pi}{12} \pm \frac{4\pi}{4}, \frac{\pi}{12} \pm \frac{6\pi}{4}, \dots \right\}$$

Das sind unendlich viele Darstellungen, aber nur vier verschiedene Punkte der komplexen Zahlenebene.



Veranschaulichung der Exponentialfunktion:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

$$\exp(z) = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

Bestimme Bild vom Koordinatennetz

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^x \cdot e^{iy}| \\ &= |e^x| \cdot |e^{iy}| = |e^x| \\ &= e^x \end{aligned}$$

Es gilt (s.Oben)

$$\underline{|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}, \quad \arg(e^z) = \operatorname{Im}(z) \quad (+2k\pi)}$$

Fall 1:) $z = x_0 + iy$ mit x_0 und fest $y \in \mathbb{R}$

$$e^{x_0+iy} = e^{x_0} \cdot e^{iy} : \text{Betrag fest, Argument läuft}$$

$|e^{x_0+iy}| = e^{x_0}$ fest Winkel: $e^{iy} \rightarrow y \in \mathbb{R}$

Bild: unendlich oft durchlaufener Kreis mit Radius $R_{x_0} = e^{x_0}$
Streifen parallel zur y -Achse \rightarrow Ring

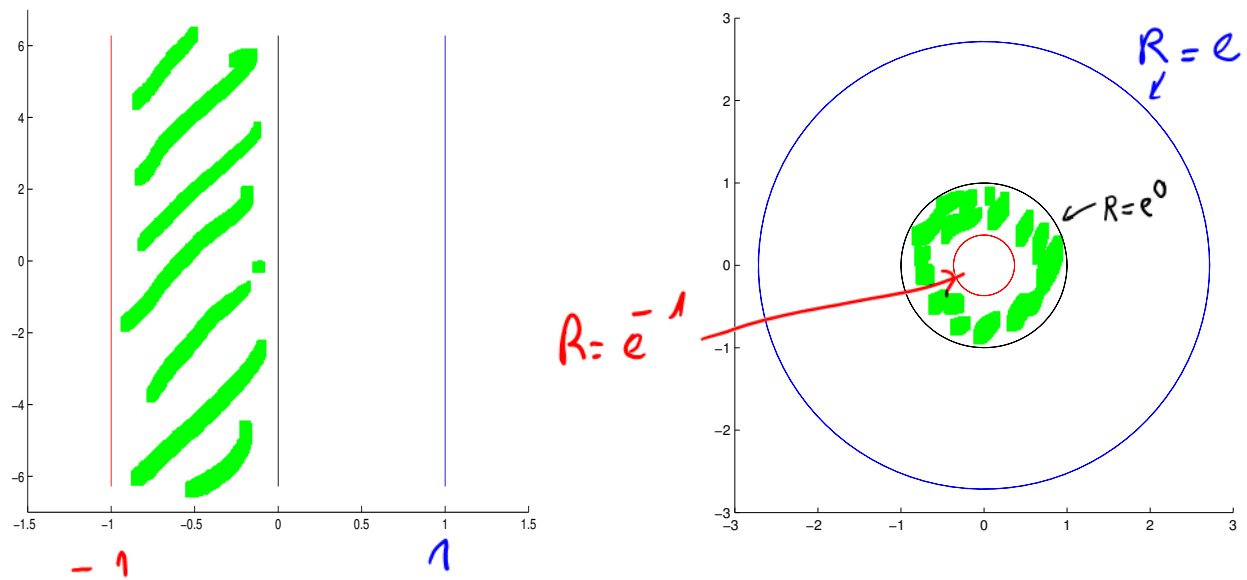


Abbildung 1: Exponentialfunktion

Fall 2:) $z = x + iy_0$ mit y_0 fest und $x \in \mathbb{R}$

$$e^{x+iy_0} = e^x \cdot e^{iy_0} : \text{Betrag l\u00e4uft, Argument fest}$$
$$|e^z| = e^x \quad x \in \mathbb{R} \rightarrow e^x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{Winkel fest}$$

Bild: Strahl mit Winkel $\alpha = y_0$

Streifen parallel zur x -Achse \rightarrow Sektor

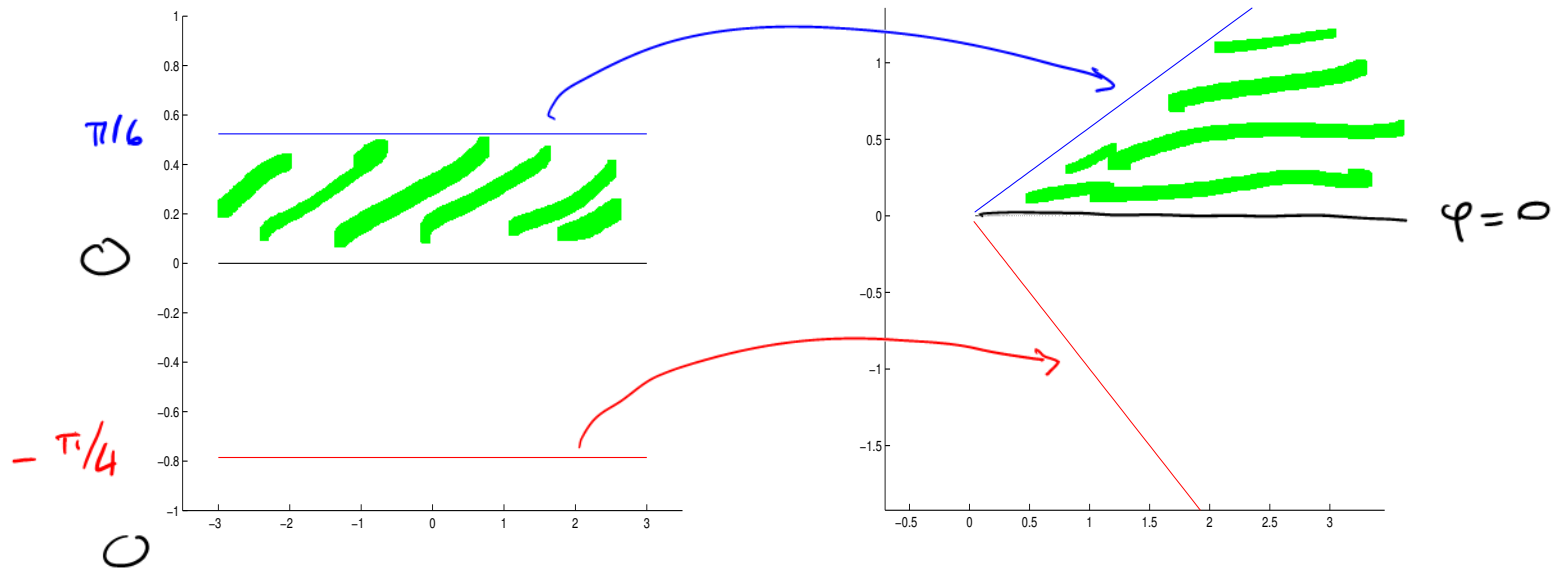


Abbildung 2: Exponentialfunktion

Beispiel G: Lösungen von $(e^z)^2 \stackrel{!}{=} -25i$

$$(e^z)^2 = e^{2z} = e^{2x+2iy} = e^{2x} \cdot e^{i2y} \stackrel{!}{=} -25i \stackrel{!}{=} 25(-i) = 25e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

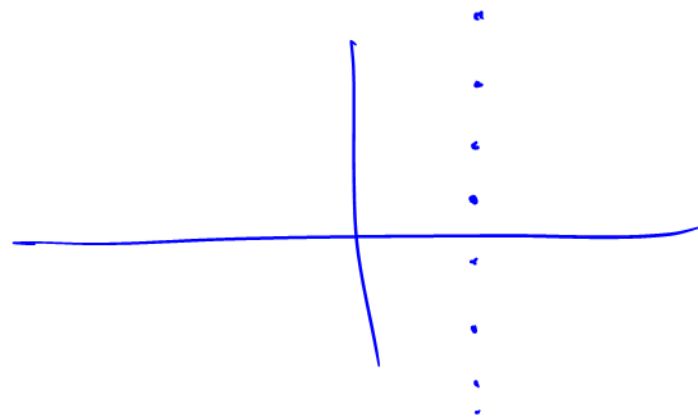
$$|(e^z)^2| = |e^{2x}| \cdot |e^{i2y}| = |25e^{-i\frac{\pi}{2}}|$$

$$|e^{2x}| = e^{2x} \stackrel{!}{=} 25 \iff e^x = 5 \iff x = \ln(5)$$

$$e^{i2y} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \iff 2y = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \iff y = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

Das sind unendlich viele Lösungen!

$$(e^z)^2 = e^{2x} \cdot e^{i2y} = 25e^{i2y} \stackrel{!}{=} 25e^{-i\frac{\pi}{2}}$$



Beispiel H: Bild von

$$D := \{ z \in \mathbb{C} : z = x + iy, |x| \in [\ln(2), \ln(3)], |y| \leq \frac{\pi}{4} \}$$

unter der Abbildung

$$f(z) := 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} e^z.$$

Skizze:

$$\text{oder } \ln(2) \leq x \leq \ln(3)$$

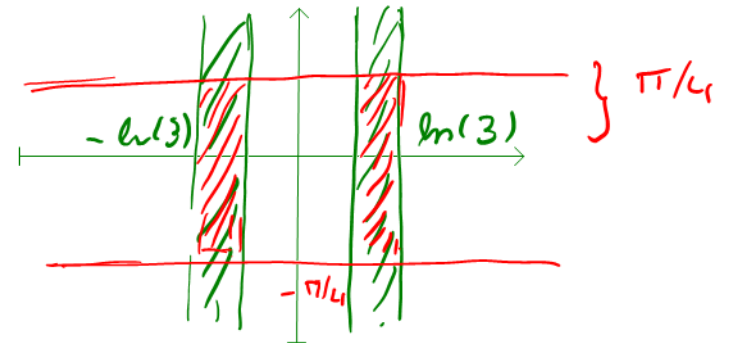
$$-\ln(3) \leq x \leq -\ln(2)$$

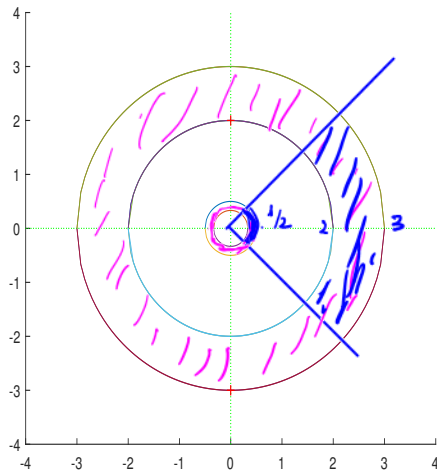
$$|e^z| = e^x \in [e^{\ln(2)}, e^{\ln(3)}] \cup [e^{-\ln(3)}, e^{-\ln(2)}]$$

$$\implies |e^z| \in [2, 3] \cup \left[\frac{1}{e^{\ln(3)}}, \frac{1}{e^{\ln(2)}} \right]$$

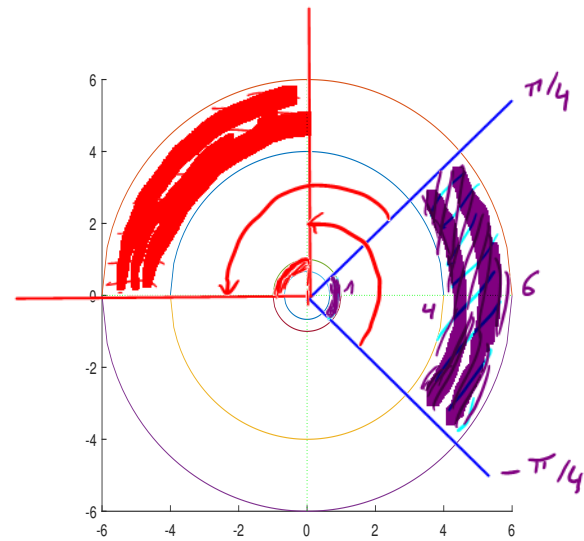
$$\implies |e^z| \in [2, 3] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{Winkel}(e^z) = \gamma \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$$





$\cdot 2$



$$|z| \in [4, 6] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Drehung um $\frac{3\pi}{4}$

$$\rightarrow \text{Winkel} \in \left[-\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right] \\ = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$f(D) = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \cup [4, 6], \arg(w) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \right\}$$