Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2024

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung zu Blatt 2 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Multiplikation, Potenzen, Exponentialfunktion

Addition und Multiplikation im $\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}$

Zur Erinnerung: Addition

$z = x + iy \in D \subset \mathbb{C}, \qquad c = a + ib \in \mathbb{C}$ fest.

$f : D \to \mathbb{C}, \qquad f : z \mapsto z + c = (x + a) + i(y + b)$

Geometrische Interpretation:
Die Teilmenge D der komplexen Zahlenebene wird um c verschoben.

Multiplikation

$z = re^{i\varphi} \in D \subset \mathbb{C}, \qquad c = \rho e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ fest.

$f(z) = c \cdot z = re^{i\varphi} \cdot \rho e^{i\alpha} = \rho r e^{i\varphi} e^{i\alpha}$

Beträge werden multipliziert. Argumente werden addiert.

Geometrische Interpretation der Multiplikation:

Beispiel A: Rechteck unter affin linearer Funktion

$D := \{z \in \mathbb{C} : \; -3 < \mathsf{Re}\,(z) < 0, \; 0 < \mathsf{Im}\,(z) < 6|\}$

$f(z) := \frac{2}{3} e^{-i\frac{\pi}{2}}\, z - \; (2 + i)$

Geometrische Lösung:

Das Rechteck wird um $\frac{\pi}{2}$ in mathematisch negativer Richtung (Uhrzeigersinn) gedreht,
um den Faktor $\frac{2}{3}$ gestaucht
und um $c = -2 - i$ verschoben.

Rechnerisch:
Gebe für $w = f(z) = u + iv$ bzw. $f(z) = \rho e^{i\alpha}$ Bereiche für u, v bzw. ρ, α an

$$
\begin{aligned}
f(z) = u + iv &= \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}\, z + \ 3 \\
&= \frac{2}{3} \left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}) \right) \, (x + iy) - \ (2 + i) =
\end{aligned}
$$

Geometrische Interpretation der affin linearen Funktion

$$f(z) = cz + d$$

Drehstreckung + anschließender Verschiebung

Streckung ist in alle Richtungen gleich! Winkel bleiben erhalten! (Vgl. Hausaufgabe 1)

Unterschied zu linearen Abbildungen im $\mathbb{R}^2$:

$$\text{zum Beispiel :} \qquad \boldsymbol{v} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}$$

Streckung um 1/2 in $x-$Richtung und um 3 in $y-$Richtung

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Winkel zwischen Urbildern $= \frac{\pi}{2}$,

Winkel zwischen Bildern $= \frac{\pi}{4}$.

Bei der komplexen Multiplikation $c \cdot z$ wird nur gedreht und gestreckt. Winkel bleiben erhalten!

Lineare Funktionen in $\mathbb{C}$ können viel weniger als lineare Funktionen in $\mathbb{R}^2$

Zur Erinnerung: Differenzierbarkeit$=$ hinreichend gute Approximierbarkeit durch lineare Funktionen

Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$: impliziert mehr als Diff.barkeit im $\mathbb{R}^2$!

$$f(z) =: \ u(x,y) \ + \ i\,v(x,y) \overset{\text{lokal}}{\approx} \ az+b$$

Im $\mathbb{R}^2$: $\quad \tilde{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \implies J\tilde{f}(x,y) \ = \ \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$

Drehstreckung im $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit

$$\boldsymbol{A} \ = \ \begin{pmatrix} k\cos(\alpha) & -k\sin(\alpha) \\ k\sin(\alpha) & k\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Später: Diffbarkeit in $\mathbb{C}$:

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

(Cauchy-Riemannsche DGL'n).

Beispiel B: Anderer Typ Aufgabe

Die halbe Kreisscheibe

$$K := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - 2 - i| < 3, \ \mathsf{Re}\,(z) > 2\}$$

soll auf die obere Hälfte des Inneren des Einheitskreises ($|z| < 1$) transformiert werden. Wie geht das?

Die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $w = f(z) := z^{-1}$

Punktrechnung $\longrightarrow$ wieder einfacher in Polarkoordinaten.

Beispiel C: Bild des Sektors

$$D := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, z = re^{i\phi} : \phi \in]\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{3}[, r \in \mathbb{R}^+ \}$$

Sei $\rho e^{i\alpha}$ die Polarkoordinaten Darstellung von $w := f(z)$.
Dann gilt

$$w := f(z) = \rho e^{i\alpha} = \frac{1}{re^{i\phi}} = \frac{1}{r} e^{-i\phi}$$

$$\Longrightarrow \rho = \frac{1}{r} \in]0, \infty[, \qquad \alpha = -\phi \in]-\tfrac{\pi}{3}, -\tfrac{\pi}{6}[$$

Das Bild ist der an der reellen Achse gespiegelte Sektor.

Beispiel D:

$D =$ Bild des Kreises mit Radius 2 um $z_0 = 2$ ohne Null.

$$D = \{\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;:\; |z-2| = 2\}$$

Beschreibe den Kreis ohne Betragsstriche:

$$|z-2|^2 = (z-2)(\overline{z-2}) \;=\; z\bar{z} - 2\bar{z} \;-2z + 4 = 4$$

$$\Longleftrightarrow z\bar{z} - 2\bar{z} \;-2z = 0,$$

setze $z = \frac{1}{w}$ ein und forme um bis erkennbar ist, was wir haben:

$$\frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}} - 2\frac{1}{\bar{w}} \;- 2\frac{1}{w} = 0 \qquad \text{multipliziere mit } w\bar{w} \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

Natürliche Potenzen/Wurzeln

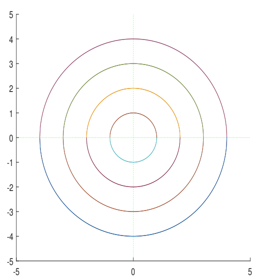
$$z = re^{i\varphi} \implies z^n = r^n (e^{i\varphi})^n = r^n (e^{in\varphi})$$

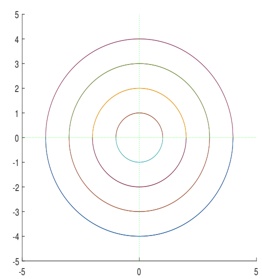
Betrag: hoch n, Winkel: mal n

Beispiel E: $D = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}, r \in [1,2], -\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{4}\}$

$w = \rho e^{i\alpha} = f(z) = z^2 = \left(re^{i\varphi}\right)^2 = r^2 e^{i2\varphi}$

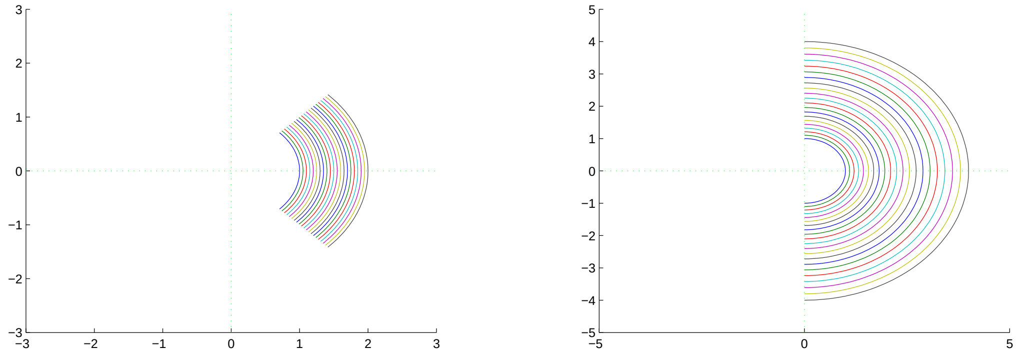
$\implies |w| =$





Winkel von $(w) = \arg(w) =$

Also $f(D) = \{w \in \mathbb{C} : w = \rho e^{i\alpha}, \rho \in \qquad , \alpha \in \qquad \}$



Umkehrung: $$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\,\frac{\varphi}{n}}$$ **?**

VORSICHT!!

$$w^n = z \iff (\rho e^{i\alpha})^n = r e^{i\varphi} \iff \rho^n e^{in\alpha} = r e^{i\varphi}$$

Es folgt **nicht** : $n\alpha = \varphi$, sondern

$$\rho^n = r \qquad \text{und} \qquad e^{in\alpha} = e^{i\varphi}$$

Beispiel F: Gesucht sind die zweiten Wurzeln aus i.

$$w = \rho \cdot e^{i\alpha} = \sqrt[2]{i} \Longrightarrow w^2 = i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$w^2 = \rho^2 \cdot e^{i2\alpha} \stackrel{!}{=} 1^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Anschaulich:

w liegt auf dem Einheitskreis und wenn man den Winkel zu w verdoppelt landet man in i.

Rechnerisch: $\rho^2 \stackrel{!}{=} 1^2 \underset{\rho>0}{\Longleftrightarrow} \rho = 1$

$e^{i2\alpha} \stackrel{!}{=} e^{i\frac{\pi}{2}} \Longleftrightarrow$

Das sind unendlich viele mögliche Darstellungen von zwei verschiedenen Punkte der komplexen Zahlenebene.

Allgemein: $\quad n \in \mathbb{N}, \quad z = re^{i\phi}, \quad w := z^{\frac{1}{n}}$

$$w^n = (\rho \cdot e^{i\alpha})^n = \rho^n \cdot e^{in\alpha} \stackrel{!}{=} |z| e^{i\phi} \Longleftrightarrow \rho = |z|^{\frac{1}{n}} \wedge e^{in\alpha} = e^{i\phi}$$

$$\Longrightarrow n\alpha = \phi + 2k\pi \Longleftrightarrow \alpha = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Mit $\qquad w = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

erhalten wir die n paarweise verschiedenen Punkte der $\mathbb{C}-$ Ebene, für die $w^n = z$ gilt.

Als **Hauptwert** definiert man: $z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\phi}{n})}$, $-\pi < \phi < \pi$.

Beispiel G: Gesucht alle Lösungen $z = re^{i\phi}$ von

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})} z^4 = \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})} \cdot 81$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}} z^4 \;=\; 81 e^{\frac{i2\pi}{3}} \iff z^4 = r^4 e^{i4\phi} = 81 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$r^4 \;=\; |z|^4 = \;81 \iff r = |z| = \;3$$

$$e^{i4\phi} \;=\; e^{i\frac{\pi}{3}} \iff 4\phi = \;2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\{\mathsf{arg}\,(z)\} \;=\; \{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12} \pm \frac{2\pi}{4}, \frac{\pi}{12} \pm \frac{4\pi}{4}, \frac{\pi}{12} \pm \frac{6\pi}{4}, \cdots\}$$

Das sind unendlich viele Darstellungen, aber nur vier verschiedene Punkte der komplexen Zahlenebene.

Veranschaulichung der Exponentialfunktion:

$$\boxed{\exp(z) = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))}$$

Bestimme Bild vom Koordinatennetz

Es gilt (s.Oben)

$$|\, e^z \,| = e^{\mathsf{Re}\,(z)}, \qquad \mathsf{arg}\,(e^z) = \mathsf{Im}\,(z) \qquad (+2k\pi)$$

Fall 1:) $z = x_0 + iy$ mit x_0 und fest $y \in \mathbb{R}$

$$e^{x_0+iy} = e^{x_0} \cdot e^{iy} \; : \; \text{Betrag fest, Argument läuft}$$

Bild: unendlich oft durchlaufener Kreis mit Radius $R_{x_0} = e^{x_0}$
Streifen parallel zur $y-$Achse $\rightarrow$ Ring

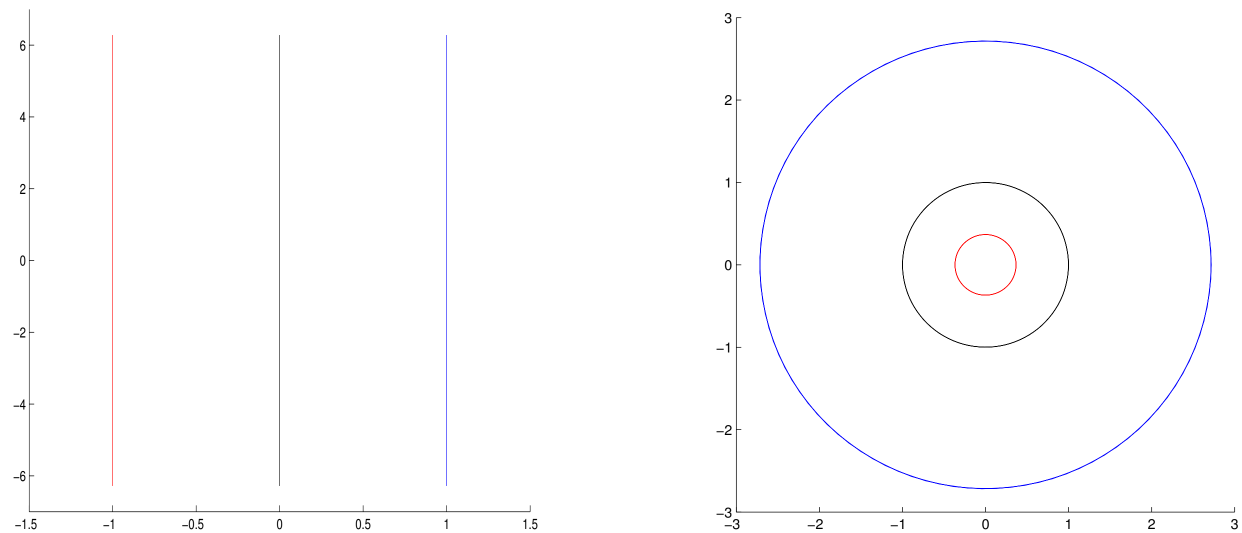


Abbildung 1: Exponentialfunktion

Fall 2:) $z = x + iy_0$ mit y_0 fest und $x \in \mathbb{R}$

$$e^{x+iy_0} = e^x \cdot e^{iy_0} \; : \; \text{Betrag läuft, Argument fest}$$

Bild: Strahl mit Winkel $\alpha = y_0$

Streifen parallel zur $x-$Achse $\rightarrow$ Sektor

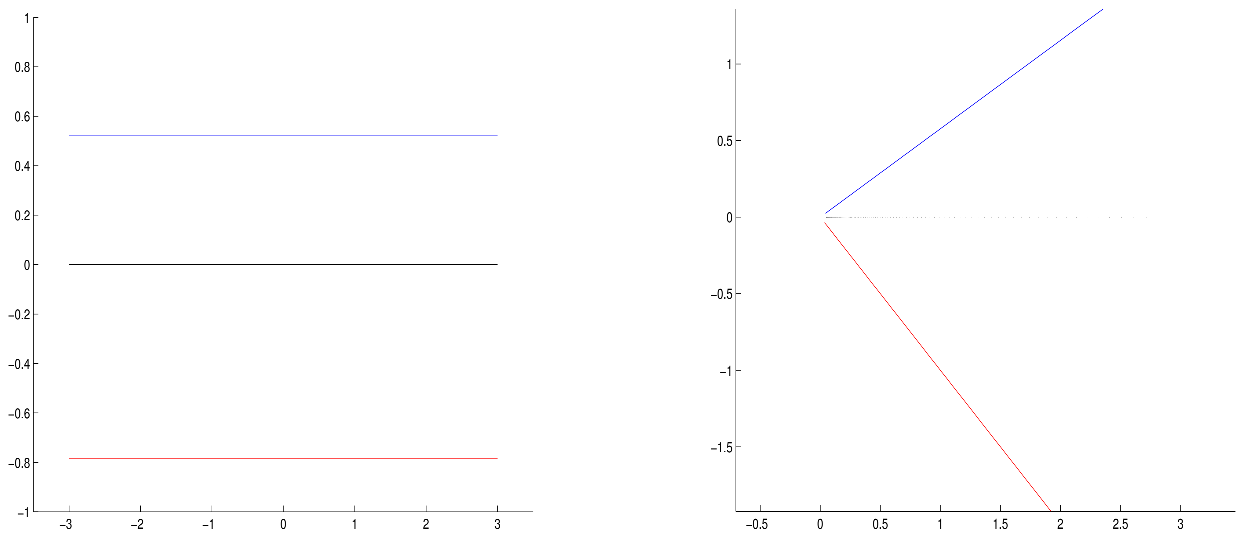


Abbildung 2: Exponentialfunktion

Beispiel G: Lösungen von $\quad (e^z)^2 = -25i$

$$(e^z)^2 = e^{2z} = e^{2x+2iy} = e^{2x} \cdot e^{i2y} = -25i \quad !$$

$$|(e^z)^2| = e^{2x} \stackrel{!}{=} 25 \iff e^x = 5 \iff x = \ln(5).$$

$$e^{i2y} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \iff 2y = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \iff y = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

Das sind unendlich viele Lösungen!

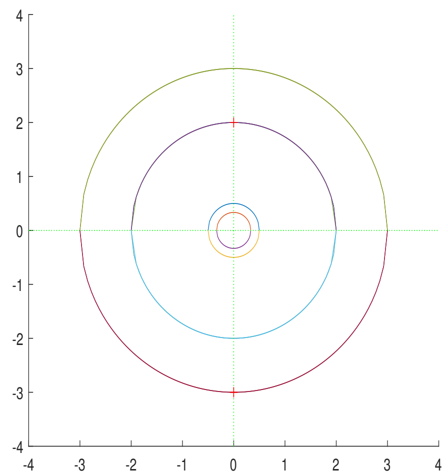
Beispiel H: Bild von

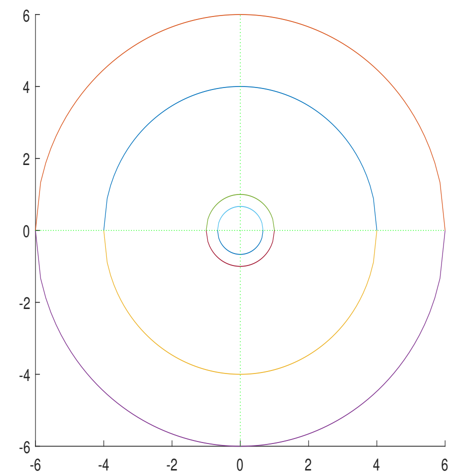
$$D := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, z = x + iy,\ |x| \in [\ln(2), \ln(3)],\ |y| \le \frac{\pi}{4} \right\}$$

unter der Abbildung

$$f(z) := 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} e^{z}.$$

Skizze:


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4


6
4
2
0
-2
-4
-6
-6
-4
-2
0
2
4
6