

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung zu Blatt 1 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Komplexe Zahlenebene

Polarkoordinaten, Addition, Multiplikation

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

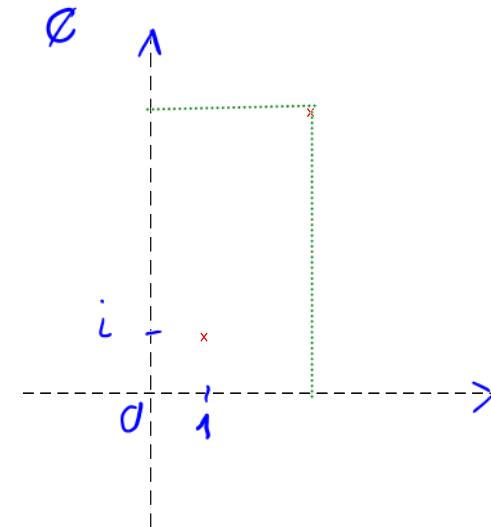
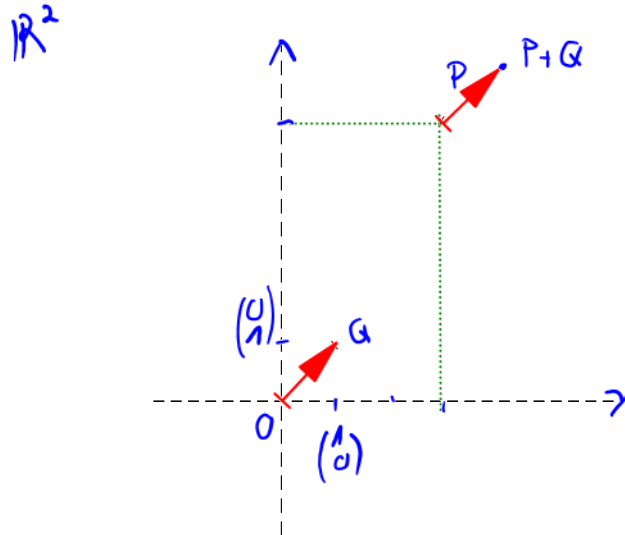
Komplexe Zahlenebene

Gegeben: Punkte in der Ebene

Koordinatensystem, zwei Richtungen

Frage: Wie eindeutig bezeichnen?

zwei Einheiten



$$P = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P+Q = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = 3 \cdot 1 + 5i$$

$$Q = 1 \cdot 1 + 1i$$

$$P+Q = 4 \cdot 1 + 6i$$

$z \in \mathbb{C} : z := x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i = \text{imaginäre Einheit}$

$x =: \text{Re}(z) =: \text{Realteil } z$

$y =: \text{Im}(z) =: \text{Imaginärteil } z$

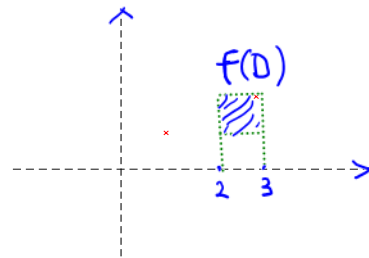
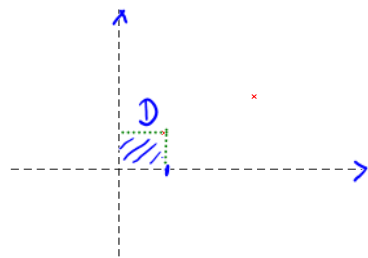
Addition und Multiplikation im $\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}$

Addition: wie im \mathbb{R}^2 komponentenweise, Siehe oben!

Geometrische Interpretation:

$f : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad f : z \mapsto z + c, \quad c \in \mathbb{C} \text{ fest.}$

Zum Beispiel $D := \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \text{Re}(z) \leq 1, 0 \leq \text{Im}(z) \leq 1\}$ und $c = 2 + i$



$$\begin{aligned} f(z) &= W = u + iv \\ &= z + c = x + iy + 2 + i \cdot 1 \\ &= \underbrace{(x+2)}_u + i \underbrace{(y+1)}_v \\ &\quad \cap \qquad \qquad \cap \\ &\quad [2,3] \qquad [1,2] \end{aligned}$$

Multiplikation:

Im \mathbb{R}^2 gibt es keine Multiplikation $v, w \in \mathbb{R}^2, v * w \in \mathbb{R}^2$, nur

$$w.v := \langle w, v \rangle \in \mathbb{R}, \quad Av \in \mathbb{R}^2, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

In der komplexen Zahlenebene **definiere**:

$$(a + ib)(x + iy) := (ax - by) + i(ay + bx) \in \mathbb{C}$$

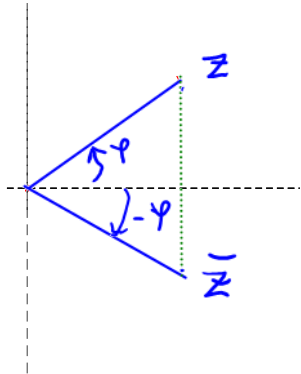
Andererseits mit den üblichen Eigenschaften der Multiplikation/Addition:

$$(a + ib)(x + iy) = ax + iay + ibx + i^2by$$

$$i^2 = -1$$

Konjugiert komplexe Zahl: $\bar{z} := x - iy$

$$z = x + iy$$



Geometrisch : Spiegelung an der reellen (x)-Achse

Division:

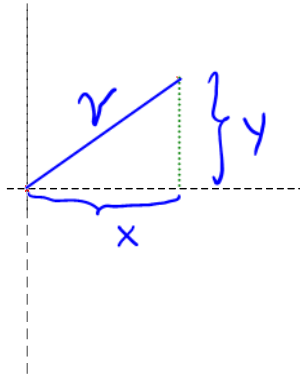
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 - (iy_2)^2}$$

$$\frac{(a + b) \cdot (a - b)}{a^2 - b^2} \quad \frac{(i^2 \cdot y_2^2)}{(-y_2^2)}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{x_2^2 + y_2^2}_{\in \mathbb{R}}} \underbrace{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)}_{\mathbb{R}\text{-Multiplikation}}$$

Betrag / Modul: Abstand zu $0 + i \cdot 0$
= Länge des Ortsvektors $= \sqrt{x^2 + y^2}$.

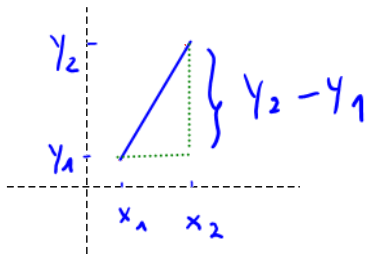


$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$|z| := r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\underline{|z|^2} = \underline{x^2 + y^2} = (x + iy)(x - iy) = \underline{\underline{z \cdot \bar{z}}}$$

$|z_1 - z_2| = \text{Abstand von } z_1 \text{ und } z_2$



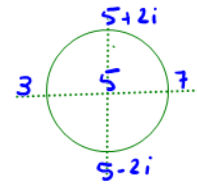
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Beispiele: Welche geometrische Gebilde werden beschrieben durch

$$(z - 5)(\bar{z} - \bar{5}) = 4,$$

$$\Rightarrow |z - 5| = 2$$

$$(z - 5)(\overline{z - 5}) = \underbrace{|z - 5|^2}_{\text{Abstand von } z \text{ zu } 5} \stackrel{!}{=} 4$$

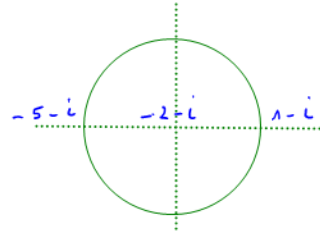


Kreis(rand) mit
M=5 R=2

$$|z + 2 + i| = 3,$$

$$|z - (-2 - i)| = 3$$

Abstand von z zu $z_0 = -2 - i = 3$



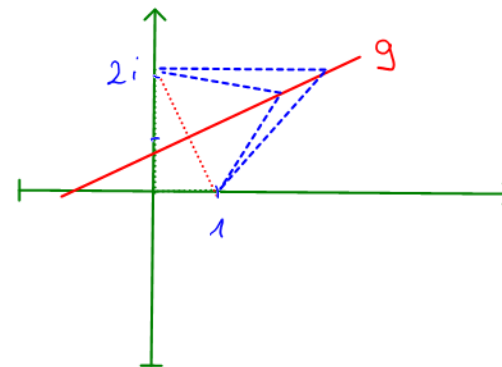
Kreis(rand) mit
M=-2-i R=3

$$|z - 2i| = |z - 1|$$

Abstand z zu
 $2i$

Abstand von z zu 1

$g \perp$ Verbindung durch 1 und $2i$
durch $\frac{2i+1}{2}$ (Mittelsenkrechte)



Polarkoordinaten: wie im \mathbb{R}^2 : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

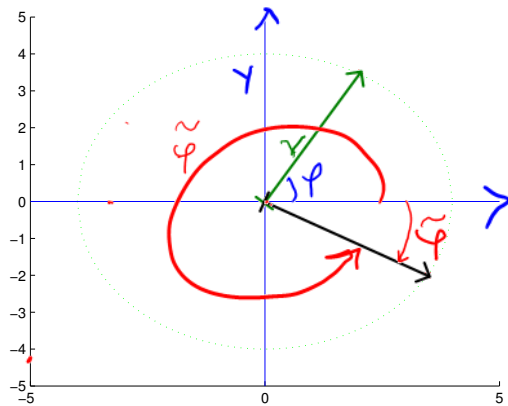
$x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$,

$r^2 = x^2 + y^2$

$\mathbb{R}^2 \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

$z = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$

$z = \underline{r} \cos(\varphi) \cdot 1 + \underline{r} \sin(\varphi) \cdot i = z$



$r = |z| =$ Abstand von z und Null

$\varphi =$ Winkel zwischen Ortsvektor und positiver x -Achse in mathematisch positiver Richtung

$= \arg(z) =$ Argument von z .

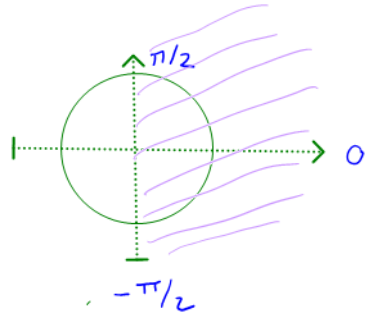
$\varphi = -\frac{\pi}{6}$ oder $\frac{11\pi}{6}$ oder $\frac{23\pi}{6}$ oder ...

$z = x + iy$ gegeben \implies Argument nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt!

Bei gegebenem $z = x + iy \neq 0$ kann man das folgende Argument wählen:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} =: A$$

$$\arctan(A) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$

$\arctan(A)$ nur $= \alpha$, wenn $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, d.h. $x \geq 0$

Beispiele: Argumente und Beträge von

$$z_1 = 4 + 4i\sqrt{3}, \quad z_2 = -8i, \quad z_3 = -4\sqrt{3} + 4i.$$

$$0 < x_1 = 4 \quad y_1 = 4\sqrt{3}$$

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{4\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$|z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2$$

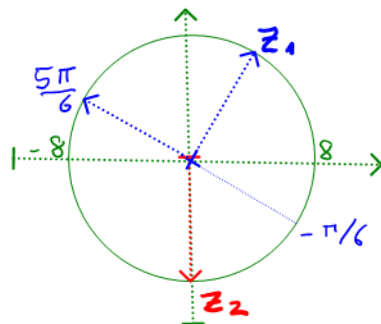
$$= 16 + 16 \cdot 3 = 16 \cdot 4$$

$$|z_1| = \sqrt{16 \cdot 4} = 4 \cdot 2 = 8$$

$$|z_2|^2 = 0^2 + 8^2$$

$$\Rightarrow |z_2| = 8$$

$$x = 0 \quad y < 0 \rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$



z_3 analog zu z_1

$$x_3 = -4\sqrt{3} < 0$$

$$\frac{y_3}{x_3} = \frac{4}{-4\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

zugehörige Punkte haben $x > 0$

$$x_3 < 0, y_3 > 0$$

$$\varphi = \pi + \arctan\left(\frac{y_3}{x_3}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$|z_3| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{16 \cdot 3 + 16} = \sqrt{16 \cdot 4} = 4 \cdot 2 = 8$$

Euler Formel:

für $\phi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi) = e^{i\phi}$$

Wegen $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ gilt

$$\underline{i^{4k} = 1}, \quad \underline{i^{4k+1} = i}, \quad \underline{i^{4k+2} = -1}, \quad \underline{i^{4k+3} = -i}.$$

Man kann exp, cos, sin über Reihen definieren:

$$\exp(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(y)^l}{l!}, \quad \cos(y) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2m}}{(2m)!}$$

$$\sin(y) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Damit erhält man (bei gleichmäßiger Konvergenz der beteiligten Reihen) für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\exp(iy) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iy)^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l y^l}{l!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i^{4k} y^{4k}}{(4k)!} + \frac{i^{4k+1} y^{4k+1}}{(4k+1)!} + \frac{i^{4k+2} y^{4k+2}}{(4k+2)!} + \frac{i^{4k+3} y^{4k+3}}{(4k+3)!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{4k}}{(4k)!} - \frac{y^{4k+2}}{(4k+2)!} \right) + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{y^{4k+3}}{(4k+3)!} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left((-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} \right) + i \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left((-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\cos(y)} + i \cdot \underbrace{\hspace{10em}}_{\sin(y)}
\end{aligned}$$

Polarkoordinaten mit Hilfe der Exponentialfunktion:

für $z = x + iy$

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r e^{i\varphi} = |z| e^{i\varphi}$$

Argument von $z = \arg(z) = \arg(re^{i\varphi}) = \varphi$?

Achtung: Argument nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt, denn $e^{i\varphi}$ ist 2π periodisch!

$$r e^{i\varphi} = r e^{i(\varphi + 2k\pi)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$\{\arg z\}$ oder $[\arg z] :=$ Menge aller Argumente von z

$\arg(z) :=$ Hauptwert von Argument z , festgelegt durch zusätzliche Bedingung

i.d.R. $\varphi \in]-\pi, \pi]$ (Hauptwert)

$\arg(0)$ ist nicht definiert!

Beispiele:

A: Polarkoordinaten von:

$$z_1 = 4 + 4i\sqrt{3}, \quad z_2 = -8i, \quad z_3 = -4\sqrt{3} + 4i.$$

$$z_1 = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_2 = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_3 = 8e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

vgl. Seite 9

B: Einheitskreis:

$$K_1 := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}, r = 1, \varphi \in [0, 2\pi)\}$$
$$= \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

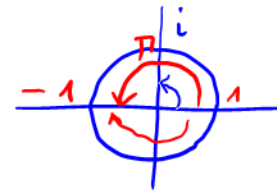
oder $= \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\varphi}, \varphi \in (-\pi, \pi]\}$?

C: Imaginäre Einheit:

$$|i| = |0 \cdot 1 + 1 \cdot i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

Wie sieht i in Polarkoordinaten aus?

$$i = re^{i\varphi} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$



$$i^2 = \underline{1} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \underline{1} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}} = 1e^{i\pi} = -1$$

D: In der Regel ist Multiplikation einfacher polar

Zum Beispiel $z_1 \cdot z_3$ für $z_1 = 4 + 4i\sqrt{3}$, $z_3 = -4\sqrt{3} + 4i$.

$$z_1 \cdot z_3 = (4 + 4i\sqrt{3})(-4\sqrt{3} + 4i) = 4(-4\sqrt{3}) - 4(4\sqrt{3}) + i[4\sqrt{3}(-4\sqrt{3}) + 4 \cdot 4]$$

Oben errechnet: $z_1 = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$ $z_3 = 8e^{i\frac{5\pi}{6}} =$

$$z_1 \cdot z_3 = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 8e^{i\frac{5\pi}{6}} = 64 e^{i\frac{\pi}{3} + i\frac{5\pi}{6}} = 64 e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

E: Betrag e^z :

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot \overbrace{|e^{iy}|}^1 = e^x$$

$$\text{Wegen } |e^{iy}| = |\cos(y) + i \sin(y)| = \sqrt{(\cos(y))^2 + (\sin(y))^2} \\ = \sqrt{1} = 1$$

$$\underline{|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)}}$$

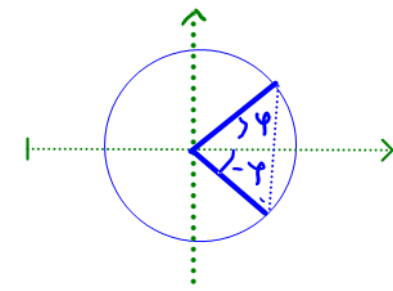
Und, $\arg(e^z)$?

$$f(z) = e^z = w$$

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = w \\ \cap \\ \mathbb{R}^+$$

$$\arg(w) = ? \quad \underline{y + (2k\pi)}$$

Konjugiert komplexe Zahl polar:



$$z = re^{i\varphi} \implies \bar{z} = re^{-i\varphi}$$

Geometrisch : Spiegelung an der reellen (x)-Achse

Für $z = x + iy = re^{i\varphi}$ und festes $c = a + ib = \rho e^{i\alpha}$

Addition: $f : z \mapsto c + z$

kartesisch: $z + c = (x + iy) + (a + ib) = (x+a) + i(b+y)$

polar: $z + c = re^{i\varphi} + \rho e^{i\alpha} = ?$

geometrisch: Verschiebung um c

Multiplikation: $f : z \mapsto c \cdot z$

kartesisch: $c \cdot z = (x + iy) \cdot (a + ib) = (xa - yb) + i(\dots)$

polar: $c \cdot z = re^{i\varphi} \cdot \rho e^{i\alpha} = r \cdot \rho \cdot e^{i\varphi + i\alpha} = r \cdot \rho \cdot e^{i(\varphi + \alpha)}$

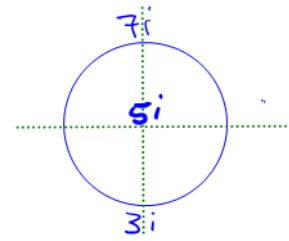
geometrisch: Nächste VL/HÜ

Zusammenfassung

Zum Abschluss noch ein paar Beispiele:

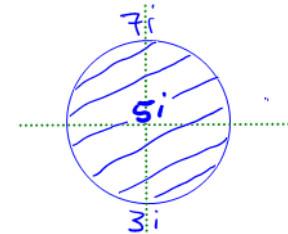
A) Skizzieren/ Beschreiben Sie mit Worten folgende Teilmengen der komplexen Zahlenebene

I) $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 5i| = 2\}$
Kreis (rand) $M=5i$ $R=2$



II) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 5i| \leq 2\}$

Kreisscheibe $M=5i$ $R=2$
mit Rand



$$\text{III) } \tilde{D} := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 5i| < 2\}$$

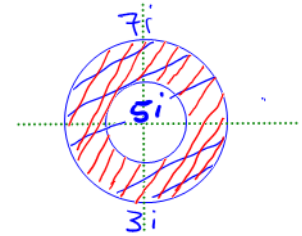
Kreisring

Innenradius 1

Außenradius 2

$M = 5i$

ohne Rand

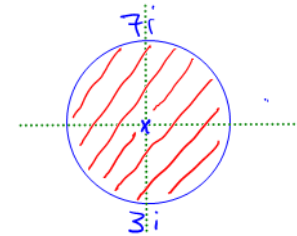


$$\text{IV) } \tilde{D} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 5i| < 2\}$$

punktierte Kreisscheibe (ohne Mittelpunkt)

$R = 2$, $M = 5i$

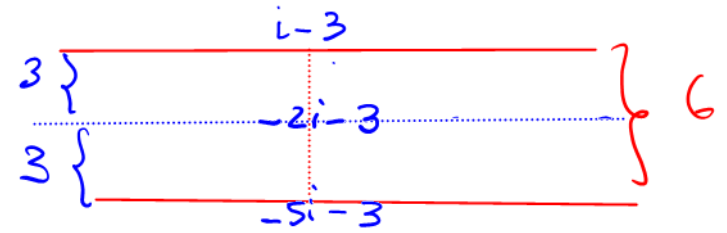
ohne Rand



Beispiel: B) Beschreiben Sie folgende Teilmengen der komplexen Zahlenebene mit Hilfe von Formeln.

M_1 : Streifen parallel zur reellen Achse mit der Breite 6, symmetrisch zu $z_0 = -3 - 2i$, mit Rand.

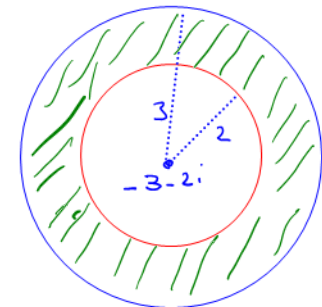
$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x \in \mathbb{R}, -5 \leq y \leq 1 \right\}$$



M_2 : Offener Kreisring um $z_0 = -3 - 2i$ mit Innenradius 2 und Außenradius 3.

$$2 < |z - z_0| < 3$$

$$M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} : 2 < |z - (-3 - 2i)| < 3 \right\}$$



M_3 : Punktierte Kreisscheibe um $z_0 = \underline{-3 - 2i}$ mit Radius 3, ohne Rand.

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - (-3 - 2i)| < 3\}$$

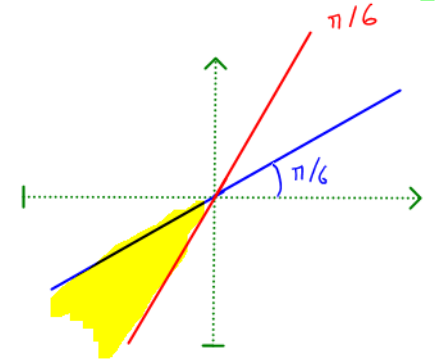
M_4 : Sektor zwischen den beiden Geraden mit $\text{Re}(z) = \sqrt{3} \cdot \text{Im}(z)$ bzw. $\sqrt{3} \cdot \text{Re}(z) = \text{Im}(z)$ in der unteren Halbebene, ohne Rand.

$$g_1: x = \sqrt{3} y$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan(\varphi_1) \quad \varphi_1 = \pi/6$$

$$g_2: \sqrt{3} x = y \quad \tan(\varphi_2) = \frac{y}{x} = \sqrt{3} \quad \varphi_2 = \pi/3$$

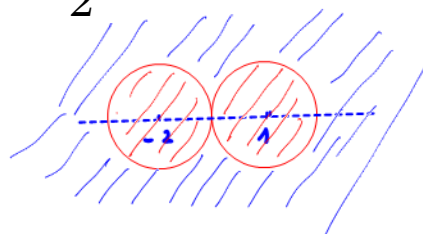
$$\{z \in \mathbb{C} : z = r e^{i\varphi} : r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in]\pi + \frac{\pi}{6}, \pi + \frac{\pi}{3}[\}$$



M_5 : Gebiet außerhalb der beiden geschlossenen Kreisscheiben mit Radius $R = \frac{3}{2}$ um die Punkte 1 und -2 .

$$|z - (-2)| \leq 3/2$$

$$|z - 1| \leq 3/2$$



$$\{z \in \mathbb{C} : |z - (-2)| > \frac{3}{2} \text{ und } |z - 1| > \frac{3}{2}\}$$