Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2024

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung zu Blatt 1 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Komplexe Zahlenebene
Polarkoordinaten, Addition, Multiplikation

Komplexe Zahlenebene

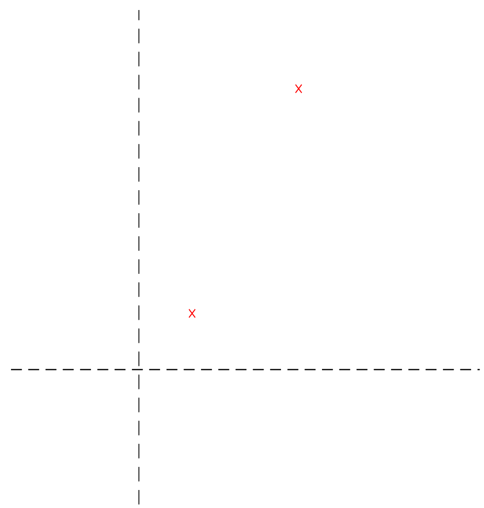
Gegeben: Punkte in der Ebene

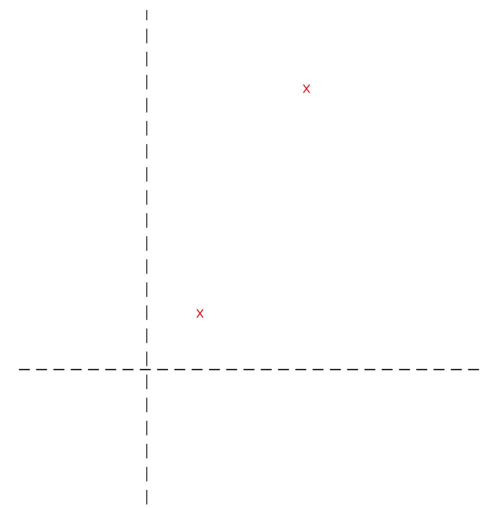
Frage: Wie eindeutig bezeichnen?

$\longrightarrow$

Koordinate nsystem, zwei Richtungen

zwei Einheiten





$z \in \mathbb{C} \,:\, z := x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}\,, \quad i =$ imaginäre Einheit

$x =:$ Re $(z) =:$ **Realteil** z

$y =:$ Im $(z) =:$ **Imaginärteil** z

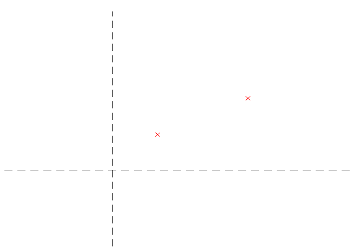
Addition und Multiplikation im $\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}$

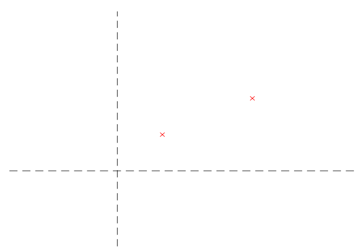
Addition: wie im $\mathbb{R}^2$ komponentenweise, Siehe oben!

Geometrische Interpretation:

$f : D \to \mathbb{C}, \qquad f : z \mapsto z + c, \qquad c \in \mathbb{C}$ fest.

Zum Beispiel $D := \{z \in C, 0 \leq \text{Re}\,(z) \leq 1,\ 0 \leq \text{Im}\,(z) \leq 1\}$ und $c = 2 + i$





Mulitiplikation:

Im $\mathbb{R}^2$ gibt es keine Multiplikation $v, w \in \mathbb{R}^2, v * w \in \mathbb{R}^2$, nur

$$w.v := < w, v > \in \mathbb{R}, \qquad Av \in \mathbb{R}^2, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

In der komplexen Zahlenebene **definiere**:

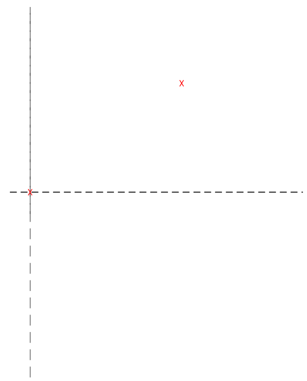
$$(a+ib)(x+iy) := (ax-by) + i(ay+bx) \qquad \in \mathbb{C}$$

Andererseits mit den üblichen Eigenschaften der Multiplikation/Addition:

$$(a+ib)(x+iy) = ax + iay + ibx + i^2by$$

$$i^2 =$$

Konjugiert komplexe Zahl: $\bar{z} := x - iy$

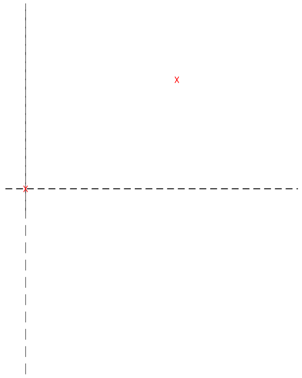


Geometrisch : Spiegelung an der reellen (x)-Achse

Division:

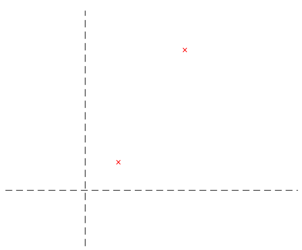
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z_2}}{z_2 \cdot \bar{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 - (iy_2)^2}$$

Betrag / Modul: Abstand zu $0 + i \cdot 0$
$=$ Länge des Ortsvektors $= \sqrt{x^2 + y^2}$.



$$|z|^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = z \cdot \bar{z}\,.$$

$|z_1 - z_2| =$ Abstand von z_1 und z_2



Beispiele: Welche geometrische Gebilde werden beschrieben durch

$$(z-5)(\bar{z}-5) \;=\; 4,$$

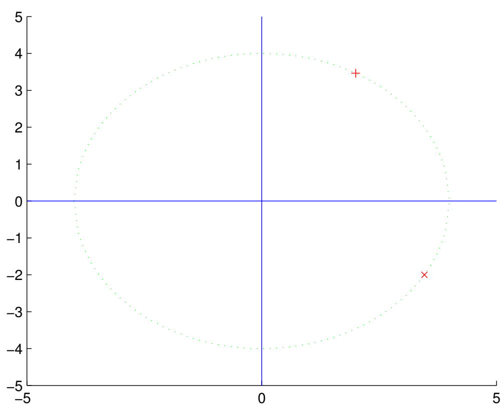
$$|z+2+i| \;=\; 3,$$

$$|z-2i| \;=\; |z-1|$$

Polarkoordinaten: wie im $\mathbb{R}^2$: $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi)\,,$$

$$z = r\,(\,\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\,)$$



$r = |z| =$ Abstand von z und Null

$\varphi =$ Winkel zwischen Ortsvektor und positiver $x-$Achse in mathematisch positiver Richtung
$=$ arg $(z) =$ **Argument von z.**

$z = x + iy$ gegeben $\Longrightarrow$ Argument nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt!

Bei gegebenem $z = x + iy \neq 0$ kann man das folgende Argument wählen:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \pi + \arctan(\frac{y}{x}) & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \arctan(\frac{y}{x}) & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$

Beispiele: Argumente und Beträge von

$$z_1 = 4 + 4i\sqrt{3}, \quad z_2 = -8i, \quad z_3 = -4\sqrt{3} + 4i.$$

Euler Formel:

für $\phi \in \mathbb{R}$ gilt: $\boxed{\cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi) \; = \; e^{i\phi}}$

Wegen $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ gilt

$$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1 \qquad i^{4k+3} = -i\,.$$

Man kann $\exp$, $\cos$, $\sin$ über Reihen definieren:

$$\exp(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(y)^l}{l!}, \qquad \cos(y) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2m}}{(2m)!}$$

$$\sin(y) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Damit erhält man (bei gleichmäßiger Konvergenz der beteiligten Reihen) für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\exp(iy) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iy)^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l y^l}{l!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i^{4k} y^{4k}}{(4k)!} + \frac{i^{4k+1} y^{4k+1}}{(4k+1)!} + \frac{i^{4k+2} y^{4k+2}}{(4k+2)!} + \frac{i^{4k+3} y^{4k+3}}{(4k+3)!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{4k}}{(4k)!} - \frac{y^{4k+2}}{(4k+2)!} \right) + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{y^{4k+3}}{(4k+3)!} \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left((-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} \right) + i \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left((-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} \right)$$

Polarkoordinaten mit Hilfe der Exponentialfunktion:

für $z = x + iy$

$x = \ r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi)\,, \quad r = \ \sqrt{x^2 + y^2}$

$z = \ r\,(\,\cos(\varphi)\ + i\ \sin(\varphi)\,)\ =\ re^{i\varphi}\ =\ |z|e^{i\varphi}$

Argument von $z =$ arg $(z) =$ arg $(re^{i\varphi})\ = \varphi$ **?**

Achtung: Argument nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt, denn $e^{i\varphi}$ ist 2π periodisch!

$$re^{i\varphi}\ =\ re^{i(\varphi\,+\,2k\pi)} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

$\{\text{arg}\, z\}$ oder $[\text{arg}\, z] :=$ Menge aller Argumente von z

$\text{arg}\,(z) :=$ Hauptwert von Argument z, festgelegt durch zusätzliche Bedingung

$$\text{i.d.R.} \qquad \varphi \in \,]-\pi,\, \pi] \qquad \text{(Hauptwert)}$$

$\text{arg}\,(0)$ ist nicht definiert!

Beispiele:

A: Polarkoordinaten von:

$$z_1 = 4 + 4i\sqrt{3}, \quad z_2 = -8i, \quad z_3 = -4\sqrt{3} + 4i.$$

B: Einheitskreis:

$$K_1 := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}, r = 1, \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

$$= \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

oder $= \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\varphi}, \varphi \in (-\pi, \pi]\}$?

C: Imaginäre Einheit: $|i| = |0 \cdot 1 + 1 \cdot i| =$

Wie sieht i in Polarkoordinaten aus?

$$i =$$

$$i^2 =$$

D: In der Regel ist Multiplikation einfacher polar

Zum Beispiel $z_1 \cdot z_3$ für $z_1 = 4 + 4i\sqrt{3}, \quad z_3 = -4\sqrt{3} + 4i.$

$$z_1 \cdot z_3 = (4 + 4i\sqrt{3})(-4\sqrt{3} + 4i) =$$

Oben errechnet: $z_1 = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \quad z_3 = 8e^{i\frac{5\pi}{6}} =$

$$z_1 \cdot z_3 = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 8e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

E: Betrag e^z :

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}|$$

Wegen $|e^{iy}| \;=\; |\cos(y) + i\sin(y)| =$

$$|\, e^z \,| \;=\; e^x \;=\; e^{\mathsf{Re}\,(z)}$$

Und, arg (e^z) ?

Konjugiert komplexe Zahl polar:

$z = re^{i\varphi} \implies \bar{z} =$

Geometrisch : Spiegelung an der reellen (x)-Achse

Für $z = x + iy = re^{i\varphi}$ und festes $c = a + ib = \rho e^{i\alpha}$

Addition: $f : z \mapsto c + z$

kartesisch: $z + c = (x + iy) + (a + ib)$
polar: $z + c = re^{i\varphi} + \rho e^{i\alpha} =$
geometrisch: Verschiebung um c

Multiplikation: $f : z \mapsto c \cdot z$

kartesisch: $c \cdot z = (x + iy) \cdot (a + ib)$
polar: $c \cdot z = re^{i\varphi} \cdot \rho e^{i\alpha}$
geometrisch: Nächste VL/HÜ

Zum Abschluss noch ein paar Beispiele:

A) Skizzieren/ Beschreiben Sie mit Worten folgende Teilmengen der komplexen Zahlenebene

I) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 5i| = 2\}$

II) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - 5i| \leq 2\}$

III) $\tilde{D} := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 5i| < 2\}$

IV) $\tilde{D} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 5i| < 2\}$

Beispiel: B) Beschreiben Sie folgende Teilmengen der komplexen Zahlenebene mit Hilfe von Formeln.

M_1: Streifen parallel zur reellen Achse mit der Breite 6, symmetrisch zu $z_0 = -3 - 2i$, mit Rand.

M_2: Offener Kreisring um $z_0 = -3 - 2i$ mit Innenradius 2 und Außenradius 3.

M_3: Punktierte Kreisscheibe um $z_0 = -3 - 2i$ mit Radius 3, ohne Rand.

M_4: Sektor zwischen den beiden Geraden mit $\mathrm{Re}\,(z) = \sqrt{3} \cdot \mathrm{Im}\,(z)$ bzw. $\sqrt{3} \cdot \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z)$ in der unteren Halbebene, ohne Rand.

M_5: Gebiet außerhalb der beiden geschlossenen Kreisscheiben mit Radius $R = \frac{3}{2}$ um die Punkte 1 und -2.