**Fachbereich Mathematik** **Wise 2024/25**
Prof. Dr. J. Struckmeier

# Klausur Komplexe Funktionen

**04. März 2025**

**Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt**
**mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.**

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

**Name:**

**Vorname:**

**Matr.-Nr.:**

**Studiengang:** AIW | ET | GES | IIW | MB | MTB | SB | TM |

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

| Aufg. | Punkte | Korrekteur |
|---|---|---|
| **1** | | |
| **2** | | |
| **3** | | |
| **4** | | |
| **5** | | |

$\sum =$

**Aufgabe 1) [3 Punkte]**

Es sei $i$ die imaginäre Einheit. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$2e^{3z} - \frac{\sqrt{2}(1+i)}{e^z} = 0.$$

**Lösungsskizze zur Aufgabe 1) [3 Punkte]**

$$2e^{3z} - \frac{\sqrt{2}(1+i)}{e^z} = 0 \iff 2e^{3z} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{e^z} \iff e^{4z} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$w := e^{4z} = e^{4x+i4y} = e^{4x} \cdot e^{i4y} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$ **[Umformen und Ansatz: 1 Punkt]**

$|w| = e^{4x} \stackrel{!}{=} \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \iff 4x = \ln(1) = 0 \iff x = 0\,.$ **[1 Punkt]**

$e^{i4y} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \arg\left(e^{i4y}\right) = \arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi$
$\iff 4y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \iff y = \frac{\pi}{16} + \frac{k}{2}\pi \qquad k \in \mathbb{Z}.$ **[1 Punkt]**

**Aufgabe 2) [2 + 2 Punkte]**

Es sei $i$ die imaginäre Einheit und $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $k, l \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\; f(z) := (x^2 - ky^2 + 2x) + i \cdot (2xy + l \cdot y)$$

in jedem Punkt aus $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

b) Für welche $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\,,\; f(z) := \frac{3}{z} + \frac{z}{3}$$

winkeltreu?

**Lösung zu 2:**

a) Mit der üblichen Bezeichnung $z = x + iy$

$f(x + iy) = \underbrace{(x^2 - k \cdot y^2 + 2x)}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{(2xy + l \cdot y)}_{v(x,y)}.$

müssen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt sein

$u_x = 2x + 2 \overset{!}{=} v_y = 2x + l$ also $\boxed{l = 2}$

und

$-u_y = 2ky \overset{!}{=} v_x = 2y$ also $\boxed{k = 1}$.

Für $k = 1$ und $l = 2$ ist $f$ auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar. **(2 Punkte)**

b) $f(z) := \frac{3}{z} + \frac{z}{3}$ ist für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex differenzierbar und damit in diesen Punkten winkeltreu sofern $f'(z) \neq 0$ gilt.

$f(z) := \frac{-3}{z^2} + \frac{1}{3} = 0 \iff \frac{3}{z^2} + \frac{1}{3} \iff z^2 = 9.$

$f$ ist also für alle $z \neq \pm 3$ aus $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ winkeltreu. **(2 Punkte)**

**Aufgabe 3: [7 Punkte]**

Gegeben ist die Funktionsvorschrift:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z+3)}.$$

a) Wie viele verschiedene Laurent-Reihen gibt es zu $f$ bei Entwicklung um $z_0 = 2$? Geben Sie jeweils die Ringe an, in denen die Laurent Reihen gegen $f$ konvergieren.

b) Berechnen Sie für jeden der Ringe aus Teil a) diejenige Laurent-Entwicklung der Funktionen $f$, die in dem Ring gegen $f$ konvergiert.

**Lösung zu 3:**

a) **(2 Punkte)**

Zu $f$ gibt es zwei Laurent-Reihen mit $z_0 = 2$.
Eine die im Ring $R_1 : \ 0 < |z-2| < 5$, konvergiert
und eine die im Ring $R_2 : \ 5 < |z-2|$ konvergiert.

b) $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z+3)} = (z-2)^{-2}\frac{1}{z+3}$.

Wir entwickeln $g(z) := \frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-2)+5}$ in jedem der Ringe. **(1 Punkt)**

In $R_1$ erhalten wir

$$g(z) = \frac{1}{(z-2)+5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z-2}{5})} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-2)^k}{5^k}.$$

Und damit

$$\begin{aligned} f(z) = (z-2)^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-2)^k}{5^{k+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-2)^{k-2}}{5^{k+1}} \\ &= \sum_{k=-2}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-2)^k}{5^{k+3}}. \end{aligned}$$

**(2 Punkte)**

In $R_2$ erhalten wir dagegen

$$g(z) = \frac{1}{(z-2)+5} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{5}{z-2})} = \frac{1}{z-2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 5^k}{(z-2)^k}.$$

Und damit

$$\begin{aligned} f(z) = (z-2)^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 5^k}{(z-2)^{k+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 5^k (z-2)^{-k-3} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-3} (-1)^{-k-3} 5^{-k-3} (z-2)^k. \end{aligned}$$

**(2 Punkte)**

**Aufgabe 4: [4 Punkte]** (Pa 7)

Gegeben ist $f(z) = \frac{1}{z^2+4z+5}$.

a) Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten von $f$ und klassifizieren Sie diese.

b) Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten von $f$.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz$.

**Lösung zu 4:**

a) $z^2 + 4z + 5 = (z+2)^2 + 1 = 0 \Longrightarrow z_{1,2} = -2 \pm i$.

$z_{1,2}$ sind einfache Nullstellen des Nenners und der Zähler ist konstant gleich Eins. Daher sind $z_{1,2}$ einfache Pole.
**(1 Punkt)**

b) $Res(f; -2-i) = \frac{1}{z-(-2+i)}\Big|_{z=-2-i} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$.

$Res(f; -2+i) = \frac{1}{z-(-2-i)}\Big|_{z=-2+i} = \frac{1}{+2i} = -\frac{i}{2}$.

**(2 Punkte)**

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(z) = 2\pi i(Res(f; -2+i) = 2\pi i(-\frac{i}{2}) = \pi$.
**(1 Punkt)**

**Aufgabe 5: [2 Punkte]**

Gesucht ist eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\quad T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$, die die reelle Achse, die imaginäre Achse und den Kreis mit Radius Eins um $z = 1$ auf Geraden abbildet.

a) Wie muss $T$ aussehen?

b) Wie muss $T$ aus a) aussehen wenn zusätzlich die Bilder aller Geraden durch den Punkt $w = 1$ gehen sollen?

**Lösung zu 5:**

a) Der gemeinsame Punkt aller drei verallgemeinerten Kreise, nämlich $z = 0$ muss auf den unendlich fernen Punkt abgebildet werden, also

$$T(z) = \frac{az+b}{z}, \qquad a, b \in \mathbb{C}.$$

b) Der gemeinsame Punkt aller Geraden, nämlich der unendlich ferne Punkt, muss auf $w = 1$ muss abgebildet werden, also

$$T(z) = \frac{z+b}{z}, \qquad b \in \mathbb{C}.$$