**Fachbereich Mathematik** **SoSe 2024**
Prof. Dr. J. Struckmeier

# Klausur Komplexe Funktionen

**26. August 2024**

**Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.**

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

**Name:**

**Vorname:**

**Matr.-Nr.:**

**Studiengang:**

| AIW | ET | GES | IIW | MB | MTB | SB | TM | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

| **Aufg.** | **Punkte** | **Korrekteur** |
|---|---|---|
| **1** | | |
| **2** | | |
| **3** | | |
| **4** | | |

$\sum =$

**Aufgabe 1) [5 Punkte]**

Es sei $i$ die imaginäre Einheit und $R$ das Rechteck

$$R := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, z = x + iy,\, x, y \in \mathbb{R},\, |x| \leq \frac{\ln(2)}{\pi},\, |y| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Bestimmen Sie das Bild von $R$ unter der Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \qquad f(z) := 2e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{\pi z}.$$

Fertigen Sie eine Skizze des Bildes an oder beschreiben Sie das Bild mit Worten.

**Lösung zur Aufgabe 1) [5 Punkte]**

$\tilde{f}(z) := e^{\pi z} = e^{\pi x + i\pi y} = e^{\pi x} \cdot e^{i\pi y} =: \tilde{\rho} \cdot e^{i\tilde{\alpha}}$

$\tilde{\rho} = \left| \tilde{f}(z) \right| = e^{\pi x} \in [e^{-\pi\frac{\ln(2)}{\pi}}, e^{\pi\frac{\ln(2)}{\pi}}] = [\frac{1}{e^{\ln 2}}, e^{\ln 2}] = [\frac{1}{2}, 2]\,.$

$\tilde{\alpha} = \arg\left(\tilde{f}(z)\right) = \pi y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\,.$ **[2 Punkte]**

$f(z) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}\tilde{f}(z)$

$\Longrightarrow |f(z| = 2 \cdot |\tilde{f}(z)| \in [1, 4]$ und $\arg\left(f(z)\right) = \frac{\pi}{4} + \arg\left(\tilde{f}(z)\right) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$

Also

$$f(R) = \{w \in \mathbb{C} :\, 1 \leq |w| \leq 4, -\frac{\pi}{4} \leq \arg\left(w\right) \leq \frac{3\pi}{4}\}$$ **[2 Punkte]**

Skizze oder Beschreibung:

$\hat{f}(R)$ ist ein Halbkreisring um Null mit Innenradius 1 und Außenradius 4 zwischen der Winkelhalbierenden des viereten und der Winkelhalbierenden des zweiten Quadranten.
**[1 Punkt]**

**Aufgabe 2) [6 Punkte]**

a) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit

$$T(3) = 0\,, \qquad T(0) = -6\,, \qquad T(-1) = \infty\,.$$

b) Welche Kreise aus $\mathbb{C}$ werden durch $T$ auf Geraden abgebildet?

c) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation $T$.

(i) $K :=$ reelle Achse,

(ii) $\hat{K} := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 2\}$,

(iii) $\tilde{K} :=$ imaginäre Achse.

**Lösung zur Aufgabe 2) [6 Punkte]**

a) $$T(3) = 0\,, T(-1) = \infty \iff \qquad T(z) = \frac{a(z-3)}{z+1}.$$

$$T(0) = -6\,, \qquad \Longrightarrow \qquad T(z) = \frac{2z-6}{z+1}.$$ **[1 Punkt]**

b) Ein Kreis wird genau dann auf eine Gerade abgebildet, wenn der Punkt $-1$ auf ihm liegt. **[1 Punkt]**

c) (i) $K = \mathbb{R}$

Wegen der reellen Koeffizienten bzw. wegen der gegebenen Bilder von $-1$, $0$, $3$ ist $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Alternative Lösung:

$-1 \in \mathbb{R} \iff T(\mathbb{R})$ ist eine Gerade.

$T(0) = -6$, $T(3) = 0 \iff T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. **[1 Punkt]**

(ii) $\hat{K} := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 2\}$

$-1 \in \hat{K} \iff T(\hat{K}) = \hat{g}$ ist eine Gerade.

Wegen der Symmetrie von $\mathbb{R}$ und $\hat{K}$ gilt $\hat{g} \perp T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$3 \in \hat{K} \implies T(3) = 0 \in \hat{g}$.

Zusammen also: $\hat{g} = i\mathbb{R} =$ imaginäre Achse. **[1 Punkt]**

(iii) $\tilde{K} :=$ imaginäre Achse.

$-1 \notin i\mathbb{R} \iff T(i\mathbb{R})$ ist ein echter Kreis $K_{i\mathbb{R}}$.

$i\mathbb{R}$ symmetrisch zu $\mathbb{R} \implies T(i\mathbb{R})$ ist symmetrisch zu $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Der Mittelpunkt des Bildkreises liegt also in $\mathbb{R}$.

Wegen $T(0) = -6$ und $T(\infty) = 2$ ist Mittelpunkt des Bildkreises also $M = -2$ und der Radius $R = 4$. **[2 Punkte]**

**Aufgabe 3) [6 Punkte]**

Gegeben sei

$$f(z) \;=\; \frac{z+1}{z^3+3z^2}\,.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von $f$.

b) Berechnen Sie die Residuen von $f$ in allen isolierten Singularitäten von $f$.

c) Wie viele verschiedene Laurent Reihen von $f$ gibt es zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$? Geben Sie jeweils die Ringe an, in denen die Laurent Reihen gegen $f$ konvergieren.

d) Berechnen Sie $\oint_{C_k} f(z)\,dz\,,\ k = 1, 2.$

(i) $C_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ C_1(t) = 3 + 2e^{it},$

(ii) $C_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ C_2(t) = 2e^{it}.$

**Lösung zur Aufgabe 3):**

a) $z^2(z+3) = 0 \iff z \in \{0, -3\}.$

Es liegt eine doppelte Nullstelle des Nenners in $z_1 = 0$ und eine einfache Nullstell des Nenners $z_2 = -3$ vor. Der Zähler verschwindet für keinen der Punkte. Es liegen also ein Pol zweiter Ordnung in $z_1 = 0$ und ein Pol erster Ordnung in $z_2 = -3$ vor **[1 Punkt]**

b) **[2 Punkte]**

$$Res(f; -3) = \left.\frac{z+1}{z^2}\right|_{z=-3} = \tfrac{-2}{9}.$$

$$Res(f; 0) = \left(\frac{z+1}{z+3}\right)'_{z=0} = \left.\tfrac{z+3-z-1}{(z+3)^2}\right|_{z=0} = \tfrac{2}{9}.$$

c) **[1 Punkt]**

Drei, und zwar in den Ringen: $R_1 : |z-1| < 1, \quad R_2 : 1 < |z-1| < 4, \quad R_3 : 4 < |z-1|.$

d) (i) $\oint_{C_1} f(z)\,dz \;=\; 0$ (CIS) **[1 Punkte]**

(ii) $\oint_{C_2} f(z)\,dz \;=\; 2\pi i\, Res(f; 0) \;=\; \dfrac{4\pi i}{9}.$ **[1 Punkt]**

**Aufgabe 4) [3 Punkte]**

Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) := \frac{z}{1 - \bar{z}}$$

und die Kurve $c : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$, $c(t) = 1 + 2e^{it}$.

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$I_C := \int_c f(z)\, dz.$$

**Lösung zur Aufgabe 4) [3 Punkte]**

$\dot{c}(t) = 2ie^{it}$, $\quad f(c(t)) = \frac{1+2e^{it}}{1-1-2e^{-it}} = -\frac{1}{2}(e^{it} + 2e^{2it})$.

$$\begin{aligned}
I_C &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\frac{1}{2}(e^{it} + 2e^{2it})) \cdot 2ie^{it} dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} i(e^{2it} + 2e^{3it}))dt \\
&= -\left[\frac{1}{2}e^{2it} + \frac{2}{3}e^{3it}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(e^{i\pi} - e^0) + \frac{2}{3}(e^{i\frac{3\pi}{2}} - e^0) \\
&= 1 - \frac{2}{3}(-i - 1) = \frac{5}{3} + i\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$