

Klausur Komplexe Funktionen

26. August 2024

**Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.**

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matr.-Nr.:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Studiengang:

AIW	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	TM	
-----	----	-----	-----	----	-----	----	----	--

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

--

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		

$\Sigma =$

Aufgabe 1) [5 Punkte]

Es sei i die imaginäre Einheit und R das Rechteck

$$R := \left\{ z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, |x| \leq \frac{\ln(2)}{\pi}, |y| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Bestimmen Sie das Bild von R unter der Abbildung

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := 2e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{\pi z}.$$

Fertigen Sie eine Skizze des Bildes an oder beschreiben Sie das Bild mit Worten.

Aufgabe 2) [6 Punkte]

a) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $T(z) := \frac{az + b}{cz + d}$ mit

$$T(3) = 0, \quad T(0) = -6, \quad T(-1) = \infty.$$

b) Welche Kreise aus \mathbb{C} werden durch T auf Geraden abgebildet?

c) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation T .

- (i) $K :=$ reelle Achse,
- (ii) $\hat{K} := \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 2\}$,
- (iii) $\tilde{K} :=$ imaginäre Achse.

Aufgabe 3) [6 Punkte]

Gegeben sei

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3+3z^2}.$$

- a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f .
- b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f .
- c) Wie viele verschiedene Laurent Reihen von f gibt es zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$?
Geben Sie jeweils die Ringe an, in denen die Laurent Reihen gegen f konvergieren.
- d) Berechnen Sie $\oint_{C_k} f(z) dz$, $k = 1, 2$.
 - (i) $C_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $C_1(t) = 3 + 2e^{it}$,
 - (ii) $C_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $C_2(t) = 2e^{it}$.

Aufgabe 4) [3 Punkte]

Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) := \frac{z}{1 - \bar{z}}$$

und die Kurve $c : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$, $c(t) = 1 + 2e^{it}$.

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$I_C := \int_c f(z) dz.$$

