Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 7, Lösungen

Tutoren gesucht:

Für die Durchführung und Korrektur von Übungen

zu Mathematik III im Wintersemester 2023/24

suchen wir noch studentische Tutoren.

Bewerbungen bitte per email (bis Vorlesungsende) an

Kai Rothe (rothe@math.uni-hamburg.de)

mit Namen, Matrikelnummer, Studiengang
und bisherigen Klausurergebnissen in Mathematik.

Aufgabe 1:

Für die folgenden Funktionen

a) $f(z) = \dfrac{z^2 + z - 2}{z^3 - 2z^2}\,,$

b) $f(z) = \dfrac{1 + z - \exp(z)}{z^4}\,,$

c) $f(z) = \cosh\dfrac{1}{z} - \sinh\dfrac{1}{z}\,,$

d) $f(z) = \dfrac{z - \pi}{\sin z}$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten vier (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z = 0$, die für große z konvergiert.

Lösung:

a) Die Singularitäten von

$$f(z) = \frac{z^2 + z - 2}{z^3 - 2z^2} = \frac{(z+2)(z-1)}{z^2(z-2)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-2}$$

sind gegeben durch die Nennernullstellen

$$z_1 = 2\,, \quad z_2 = 0\,.$$

Da z_k keine Zählernullstellen sind, ist $z_1 = 2$ Pol 1. Ordnung und $z_2 = 0$ Pol 2. Ordnung.

$$\text{Res}\,(f; z_1) = \left.\frac{z^2 + z - 2}{(z^3 - 2z^2)'}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{z^2 + z - 2}{3z^2 - 4z}\right|_{z=2} = 1\,,$$

$$\begin{aligned}
\text{Res}\,(f; z_2) &= \frac{1}{1!}\left.\left(z^2\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-2}\right)\right)'\right|_{z=0} = \left.\left(1 + \frac{z^2}{z-2}\right)'\right|_{z=0} \\
&= \left.\frac{2z(z-2) - z^2}{(z-2)^2}\right|_{z=0} = 0
\end{aligned}$$

Die Laurent-Entwicklung im Außengebiet $|z| > 2$ ergibt sich durch:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1 - 2/z} \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{8}{z^4} + \cdots
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1+z-\exp(z)}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(1+z-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right) \\ &= -\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{4!}-\frac{z}{5!}-\cdots \end{aligned}$$

Die einzige Singularität $z_0 = 0$ ist also Pol 2. Ordnung mit

$$\text{Res }(f;z_0) = a_{-1} = -\frac{1}{3!}\,.$$

c)
$$\begin{aligned} f(z) &= \cosh\frac{1}{z}-\sinh\frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{1}{z}\right)+\exp\left(-\frac{1}{z}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{1}{z}\right)-\exp\left(-\frac{1}{z}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{n!}}_{=:a_n}\frac{1}{z^n} = 1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}+\cdots \end{aligned}$$

Die einzige Singularität $z_0 = 0$ ist also wesentlich mit

$$\text{Res }(f;z_0) = a_{-1} = -1\,.$$

d) Die Singularitäten von $f(z) = \dfrac{z-\pi}{\sin z}$ ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} 0 = \sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{-y+ix}-e^{y-ix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-ie^{-y}(\cos x+i\sin x)+ie^{y}(\cos x-i\sin x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin x(e^{y}+e^{-y})+i\cos x(-e^{-y}+e^{y})\right) \\ &= \sin x\cosh y+i\cos x\sinh y \end{aligned}$$

Alle Lösungen sind gegeben durch $x = k\pi$ und $y = 0$, also durch die bereits bekannten reellen Nullstellen $z_k = k\pi$.

Diese Nennernullstellen sind einfach, denn es gilt

$$(\sin)'(k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0.$$

Die einzige (einfache) Zählernullstelle ist $z_1 = \pi$. Damit ist z_1 hebbare Singularität und alle anderen $z_{k\neq 1}$ sind Pole 1.Ordnung.

Für die Residuen ergibt sich

$$\text{Res }(f;z_1) = 0 \quad \text{und} \quad \text{Res }(f;z_{k\neq 1}) = \frac{k\pi-\pi}{(\sin)'(k\pi)} = \frac{(k-1)\pi}{(-1)^k}\,.$$

Eine für alle z mit $|z| > R$ konvergente Laurent-Reihe existiert nicht, da sich die Singularitäten im Unendlichen häufen.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{32}{z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 16} \, .$$

a) Man bestimme mit Hilfe von Laurent-Reihenentwicklungen die Partialbruchzerlegung von f .

b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_c f(z)\, dz$$

für den Kreis $c: \; |z + 2 - 2i| = 3$.

Lösung:

a) Aus der Faktorisierung

$$z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 16 = (z^2 + 4)(z + 2)^2 = (z + 2i)(z - 2i)(z + 2)^2$$

ergeben sich die Nennernullstellen

$$z_0 = -2i \, , \quad z_1 = 2i \, , \quad z_2 = -2 \, .$$

Damit sind z_0 und z_1 Pole 1. Ordnung und z_2 ist Pol 2. Ordnung. Der Hauptteil der Laurententwicklung in z_k , $k = 0, 1$ besitzt damit die Form

$$h(z, z_k) = \frac{a_{-1,k}}{z - z_k} \, , \quad \text{wobei} \quad a_{-1,k} = \operatorname{Res}(f(z); z_k)$$

gilt. Für $z_0 = -2i$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z); -2i) &= \left. \frac{32}{(z - 2i)(z + 2)^2} \right|_{z=-2i} = \frac{32}{-4i(-2i + 2)^2} \\ &= \frac{32}{4i \cdot 8i} = -1 \end{aligned}$$

Zum gleichen Ergebnis führt die Taylor-Reihenentwicklung des holomorphen Anteils von f :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z + 2i} \cdot \underbrace{\frac{32}{(z - 2i)(z + 2)^2}}_{= g_1(z), \, \text{(holom.)}} \\ &= \frac{1}{z + 2i} (g_1(-2i) + g_1'(-2i)(z + 2i) + \cdots) \end{aligned}$$

mit $g_1(-2i) = \operatorname{Res}(f(z); -2i) = -1$. Insgesamt erhält man also

$$f(z) = \underbrace{-\frac{1}{z+2i}}_{= h(z,-2i)} + \underbrace{g_1'(-2i) + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Für $z_1 = 2i$ ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2i} \cdot \underbrace{\frac{32}{(z+2i)(z+2)^2}}_{= g_2(z),\,(\text{holom.})} \\ &= \frac{1}{z-2i}(g_2(2i) + g_2'(2i)(z-2i) + \cdots) \end{aligned}$$

mit $g_2(2i) = \text{Res}(f(z); 2i) = -1$. Insgesamt erhält man also

$$f(z) = \underbrace{-\frac{1}{z-2i}}_{= h(z,2i)} + \underbrace{g_2'(2i) + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Für den Pol 2. Ordnung $z_2 = -2$ erhält man den Hauptteil der Laurent-Reihe um z_2 über die Taylor-Reihenentwicklung des holomorphen Anteils von f :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+2)^2} \cdot \underbrace{\frac{32}{z^2+4}}_{= g_3(z),\,(\text{holom.})} \\ &= \frac{1}{(z+2)^2}\left(g_3(-2) + g_3'(-2)(z+2) + \frac{1}{2}g_3''(-2)(z+2)^2 + \cdots\right) \end{aligned}$$

Nach kurzer Rechnung erhält man

$$g_3(-2) = 4\,, \quad g_3'(-2) = 2 \;=\; (\text{Res}(f(z); -2))$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \underbrace{\frac{4}{(z+2)^2} + \frac{2}{z+2}}_{= h(z,-2)} + \underbrace{g_3''(-2)/2 + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet deshalb:

$$f(z) = h(z,-2i) + h(z,2i) + h(z,-2) = -\frac{1}{z+2i} - \frac{1}{z-2i} + \frac{4}{(z+2)^2} + \frac{2}{z+2}\,.$$

Als reelle Partialbruchzerlegung ergibt sich:

$$f(z) = -\frac{2z}{z^2+4} + \frac{4}{(z+2)^2} + \frac{2}{z+2}\,.$$

b) Von den Singularitäten von f

$$z_0 = -2i\,, \quad z_1 = 2i\,, \quad z_2 = -2\,.$$

liegt nur z_1 und z_2 innerhalb von c . Damit ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\oint_c \frac{32}{z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 16}\,dz \;= 2\pi i\,(\text{Res}(f; 2i) + \text{Res}(f; -2)) = 2\pi i$$

Bearbeitungstermine: 3.7.-7.7.