Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 6, Lösungen

Aufgabe 1:

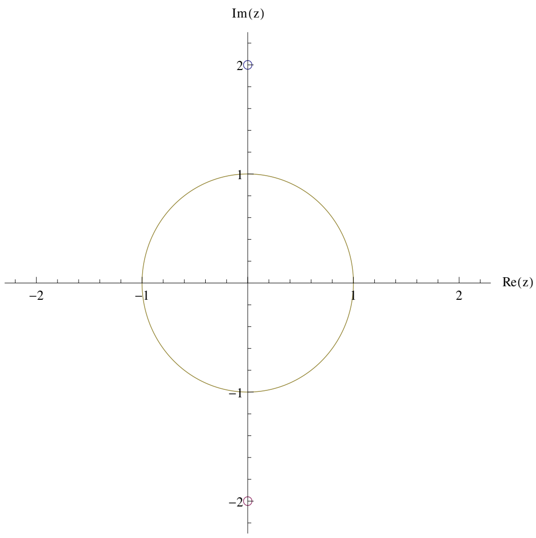
Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4}\,dz\,,$ b) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z+1}\,dz\,,$ c) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{\cos z}{(z+i)^2}\,dz\,,$

d) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=1} \sin z + \frac{\ln z}{(z-2)^2}\,dz\,,$ e) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{\cos z}{z^3}\,dz$, f) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cosh z}{(z-i\pi)^5}\,dz\,.$

Lösung:

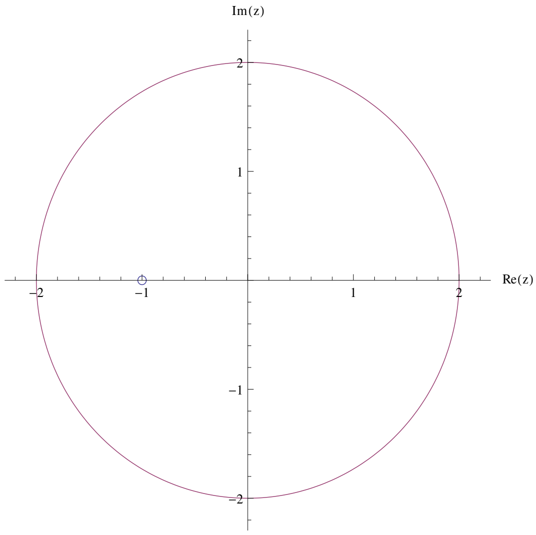
a) Die Singularitäten $z_{1,2} = \pm 2i$ liegen nicht im Kreis $|z| = 1$.



Cauchyscher Integralsatz:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4}\,dz = 0$$

b)

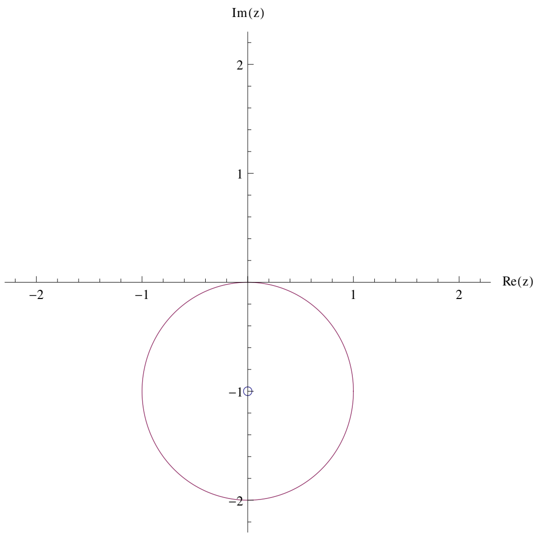


Die Singularität $z_1 = -1$ liegt im Kreis $|z| = 2$.

Cauchysche Integralformel:

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z+1}\,dz \;= 2\pi i((-1)^2+1) = 4\pi i$$

c)



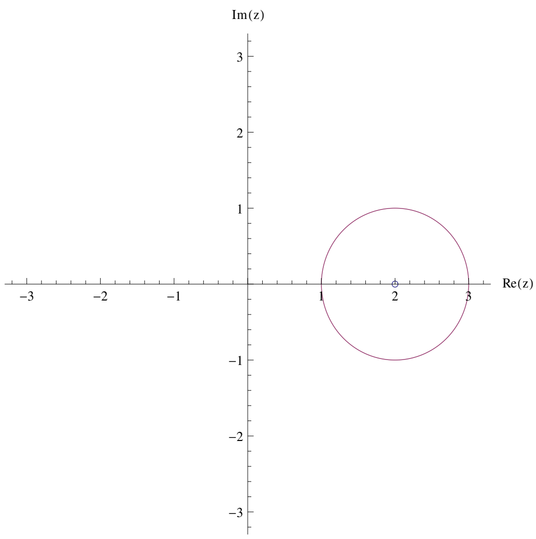
Die Singularität $z_1 = -i$ liegt im Kreis $|z+i| = 1$.

verallgemeinerte Causchysche Integralformel:

$$\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{\cos z}{(z+i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\,(\cos z)'\,|_{z=-i}$$

$$= 2\pi i \sin i = 2\pi i \tfrac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i} = \pi\,(e^{-1}-e)$$

d)



Die Singularität des zweiten Summanden im Integranden $z_1 = 2$ liegt im Kreis $|z-2| = 1$.

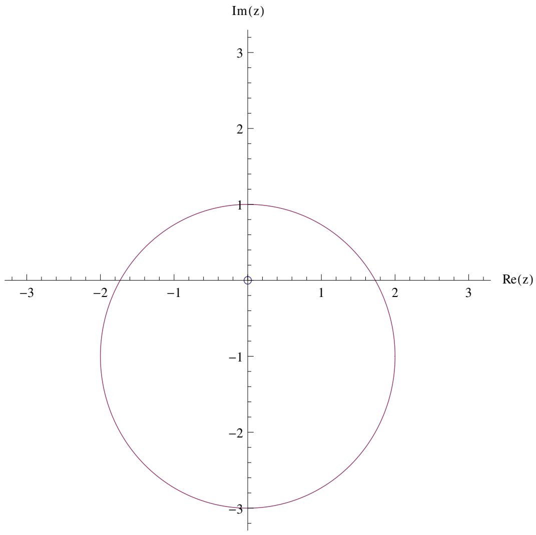
Cauchyscher Integralsatz und verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$\oint\limits_{|z-2|=1} \sin z + \frac{\ln z}{(z-2)^2}\,dz$$

$$= \oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\ln z}{(z-2)^2}\,dz$$

$$= 2\pi i \ln' z|_{z=2} = \pi i$$

e)

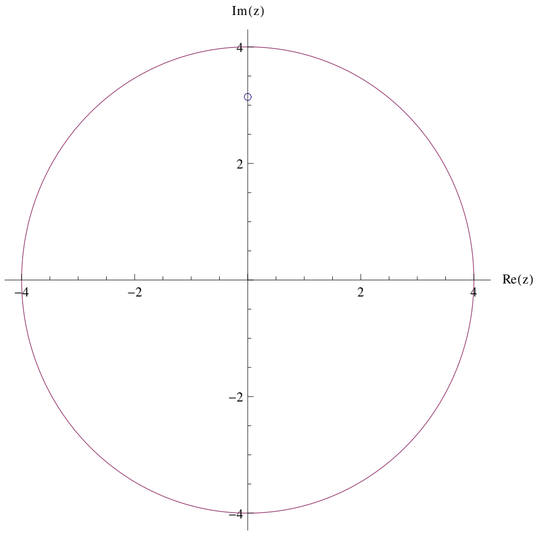


Die Singularität $z_1 = 0$ liegt im Kreis $|z+i| = 2$.

verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{\cos z}{z^3}\, dz = 2\pi i \frac{(\cos z)''}{2!}\bigg|_{z=0} = -\pi i$$

f) Die Singularität $z_1 = i\pi$ liegt im Kreis $|z| = 4$.



verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cosh z}{(z-i\pi)^5}\, dz$$

$$= \frac{2\pi i\, (\cosh z)''''|_{z=i\pi}}{4!}$$

$$= \frac{\pi i \cosh i\pi}{12} = \frac{\pi i \cos \pi}{12}$$

$$= -\frac{\pi i}{12}$$

Aufgabe 2:

Man gebe **alle** Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{5z}{z^2 + z - 6}$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = i$ an. Wo konvergieren die Reihen jeweils?

Lösung:

Die Faktorisierung des Nenners $z^2 + z - 6 = (z - 2)(z + 3)$ ergibt die Singularitäten der Funktion bei $z_1 = 2$ und $z_2 = -3$. Eine Partialbruchzerlegung liefert:

$$f(z) = \frac{5z}{z^2 + z - 6} = \frac{3}{z+3} + \frac{2}{z-2} \,.$$

Aufgrund der Lage des Entwicklungspunktes bei $z_0 = i$ und der beiden Singularitäten $z_1 = 2$ und $z_2 = -3$ kann man ablesen, dass eine Taylor-Reihenentwicklung in der Kreisscheibe $|z - i| < \sqrt{5}$ vorliegen wird, eine Laurent-Reihenentwicklung im Kreisring $\sqrt{5} < |z - i| < \sqrt{10}$ und eine davon verschiedene Laurent-Reihenentwicklung im Außenraum $\sqrt{10} < |z - i|$.

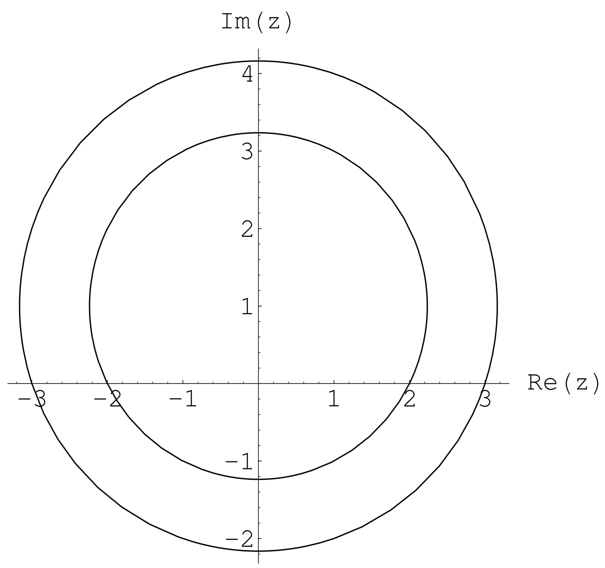


Bild 2: Konvergenzbereiche der Laurent-Reihenentwicklungen um $z_0 = i$

Mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe im entsprechenden Konvergenzbereich können die Partialbrüche durch Reihenentwicklungen dargestellt werden:

$$|z-i|<\sqrt{5}\quad:\quad \frac{2}{z-2}=\frac{2}{-2+i+(z-i)}=\frac{2}{-2+i}\cdot\frac{1}{1-(z-i)/(2-i)}$$
$$=\frac{2}{-2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2}{(2-i)^{n+1}}(z-i)^n$$

$$|z-i|>\sqrt{5}\quad:\quad \frac{2}{z-2}=\frac{2}{-2+i+(z-i)}=\frac{2}{z-i}\cdot\frac{1}{1-(2-i)/(z-i)}$$
$$=\frac{2}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-i)^n}{(z-i)^n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{2}{(2-i)^{n+1}}(z-i)^n$$

$$|z-i|<\sqrt{10}\quad:\quad \frac{3}{z+3}=\frac{3}{3+i+(z-i)}=\frac{3}{3+i}\cdot\frac{1}{1+(z-i)/(3+i)}$$
$$=\frac{3}{3+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3+i)^n}(z-i)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-3}{(-3-i)^{n+1}}(z-i)^n$$

$$|z-i|>\sqrt{10}\quad:\quad \frac{3}{z+3}=\frac{3}{3+i+(z-i)}=\frac{3}{z-i}\cdot\frac{1}{1+(3+i)/(z-i)}$$
$$=\frac{3}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3+i)^n}{(z-i)^n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{3}{(-3-i)^{n+1}}(z-i)^n$$

Taylor-Reihe mit Konvergenz in der Kreisscheibe $\quad |z-i|<\sqrt{5}$:

$$f(z)\;=\;\frac{3}{z+3}+\frac{2}{z-2}\;=\;\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{(2-i)^{n+1}}+\frac{-3}{(-3-i)^{n+1}}\right)(z-i)^n}_{\text{Nebenteil}}\;.$$

Laurent-Reihe mit Konvergenz im Kreisring $\quad \sqrt{5}<|z-i|<\sqrt{10}$:

$$f(z)\;=\;\frac{3}{z+3}+\frac{2}{z-2}\;=\;\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{2}{(2-i)^{n+1}}(z-i)^n}_{\text{Hauptteil}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-3}{(-3-i)^{n+1}}(z-i)^n}_{\text{Nebenteil}}\;.$$

Laurent-Reihe mit Konvergenz im Außenring $\quad \sqrt{10}<|z-i|$:

$$f(z)\;=\;\frac{3}{z+3}+\frac{2}{z-2}\;=\;\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{2}{(2-i)^{n+1}}+\frac{3}{(-3-i)^{n+1}}\right)(z-i)^n}_{\text{Hauptteil}}\;.$$

Bearbeitungstermine: 19.6.- 23.6.