Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabenblatt 6, Lösungen

Aufgabe 1:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int_c 2z - 3\,dz$ entlang des geradlinigen Weges von $-1-i$ nach $-i$,

b) $\displaystyle\int_c z\cosh z\,dz$ für $c(t) = it$ mit $0 \le t \le 1$,

c) $\displaystyle\int_{-i}^{1} \frac{z+1}{z}\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert),

d) $\displaystyle\int_{-i}^{i} \sin z\,dz$ für $c(t) = it$, $-1 \le t \le 1$.

Lösung:

a) direkt:

Kurvenparametrisierung:

$c(t) = -1 - i + t\,, \quad 0 \le t \le 1 \ \Rightarrow\ \dot c(t) = 1$

$$\begin{aligned}\int_c 2z - 3\,dz &= \int_0^1 (2c(t) - 3)\dot c(t)\,dt = \int_0^1 2(-1-i+t) - 3\,dt \\ &= \left((-5-2i)t + t^2\right)\Big|_0^1 = -5 - 2i + 1 = -4 - 2i\end{aligned}$$

Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
\int\limits_c 2z-3\,dz &= \int\limits_{-1-i}^{-i} 2z-3\,dz \;=\; \left(z^2-3z\right)\Big|_{-1-i}^{-i} \\
&= (-i)^2-3(-i)-\left((-i-1)^2-3(-i-1)\right) \\
&= -1+3i-(2i+3i+3) = -4-2i
\end{aligned}$$

b) direkt: $\quad c(t)=it \Rightarrow \dot{c}(t)=i$ mit $0\le t\le 1$ und $\cosh(it)=\cos t$

$$\begin{aligned}
\int\limits_c z\cosh z\,dz &= \int\limits_0^1 \dot{c}(t)c(t)\cosh c(t)\,dt = \int\limits_0^1 (i)^2 t\cosh(it)\,dt \\
&= -\int\limits_0^1 t\cos t\,dt = -\,t\sin t\big|_0^1 + \int\limits_0^1 \sin t\,dt \\
&= -\,(t\sin t+\cos t)\big|_0^1 = -\sin 1-\cos 1+1
\end{aligned}$$

Stammfunktion: $\quad$ mit $\sinh i = \dfrac{1}{2}(e^i-e^{-i}) = i\sin 1$

$$\begin{aligned}
\int\limits_c z\cosh z\,dz &= \int\limits_0^i z\cosh z\,dz = (z\sinh z-\cosh z)\big|_0^i \\
&= i\sinh i-\cosh i+1 = -\sin 1-\cos 1+1
\end{aligned}$$

c) direkt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-i}^{1} \frac{z+1}{z}\,dz &= \int\limits_{-\pi/2}^{0} \left(1+\frac{1}{c(\varphi)}\right)\dot{c}(\varphi)\,d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{0} \left(1+\frac{1}{e^{i\varphi}}\right) ie^{i\varphi}\,d\varphi \\
&= i\int\limits_{-\pi/2}^{0} 1+e^{i\varphi}\,d\varphi \;=\; i\left(\varphi+\frac{e^{i\varphi}}{i}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{0} \;=\; 1+i\left(1+\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Stammfunktion:

In der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-^0$ ist $\ln z$ Stammfunktion zu $\dfrac{1}{z}$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-i}^{1} \frac{z+1}{z}\,dz &= \int\limits_{-i}^{1} 1+\frac{1}{z}\,dz = (z+\ln z)\big|_{-i}^{1} \\
&= 1+\ln|1|+i\cdot 0-\left(-i+\ln|-i|+i\frac{-\pi}{2}\right) \\
&= 1+i\left(1+\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

d) direkt: $c(t) = it$, $\dot{c}(t) = i$ mit $-1 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned}
\int_{-i}^{i} \sin z \, dz &= \int_{-1}^{1} \dot{c}(t) \sin(c(t)) \, dt = \int_{-1}^{1} i \sin(it)) \, dt \\
&= \int_{-1}^{1} i \frac{1}{2i} \left(e^{iit} - e^{-iit} \right) \, dt = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{t} - e^{-t} \, dt \\
&= -\frac{1}{2} \left(e^{t} + e^{-t} \right) \Big|_{-1}^{1} = 0
\end{aligned}$$

Stammfunktion:

$$\int_{-i}^{i} \sin z \, dz = -\cos z|_{-i}^{i} = -\frac{1}{2} \left(e^{ii} + e^{-ii} - e^{-ii} - e^{ii} \right) = 0$$

Aufgabe 2:

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{d\xi}{4+\xi^2}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{3}{z^2+2z+5}\,, \quad z_0 = i$ und $z_0 = 0\,,$

(ii) $f(z) = \dfrac{2}{e^z-1}\,, \quad z_0 = 2\pi(1+i)\,,$

(iii) $f(z) = \dfrac{z}{\ln(3-2z)}\,, \quad z_0 = 0$ und $z_0 = \dfrac{11}{8}\,.$

Lösung:

a) In der Kreisscheibe $|\xi| < 2 =: r$ erhält man mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{4+\xi^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+(\xi/2)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{\xi}{2}\right)^2\right)^n = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n}.$$

Da die Reihe in der Kreisscheibe gleichmäßig konvergiert, darf gliedweise integriert werden:

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^z \frac{d\xi}{4+\xi^2} = \int_0^z \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n} d\xi = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^z\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n} d\xi \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n+1}\Bigg|_0^z = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1} \end{aligned}$$

b) (i)

$$f(z) = \frac{3}{z^2+2z+5} = \frac{3}{(z-(-1+2i))(z-(-1-2i))}$$

Die Singularitäten liegen bei $z_1 = -1+2i$ und $z_2 = -1-2i$. Damit ergibt sich der Konvergenzradius der Taylorreihe zum Entwicklungspunkt z_0 durch

$$r = \min\{|z_1 - z_0|, |z_2 - z_0|\}\,.$$

$$z_0 = i: \quad r_1 = \min\{|-1+2i-i|, |-1-2i-i|\} = \min\{\sqrt{2}, \sqrt{10}\} = \sqrt{2}$$

$$z_0 = 0: \quad r_2 = \min\{|-1+2i|, |-1-2i|\} = \sqrt{5}$$

(ii) Die Singularitäten von $f(z) = \dfrac{2}{e^z - 1}$ ergeben sich aus

$0 = e^z - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = e^x \cos y + ie^x \sin y$
$\Rightarrow \quad e^x \sin y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = k\pi$
$\Rightarrow \quad e^x \cos(k\pi) = e^x(-1)^k = 1$
$\Rightarrow \quad x = 0$ und $k = 2n$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Die Singularitäten liegen also bei $\tilde{z}_n = 2n\pi i$.
Der Konvergenzradius für $z_0 = 2\pi(1+i)$ ergibt sich durch:

$$r = \min_n\{|\tilde{z}_n - z_0|\} = \min_n\{|2n\pi i - 2\pi - 2\pi i|\} = |-2\pi| = 2\pi$$

(iii) Für die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{\ln(3-2z)}$ bestehen folgende Definitionslücken:
1. Fall:
Der Hauptwert des Logarithmus von $\ln(3-2z)$ ist nur in der geschlitzen Ebene definiert, d.h. ausgenommen sind reelle Zahlen x mit

$$3 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x.$$

2.Fall:
Nennernullstellen müssen ausgenommen werden:
$0 = \ln(3-2z) = \ln|3-2z| + i\arg(3-2z) \quad \Rightarrow$
$\arg(3-2z) = 0$, also ist z reell und $|3-2z| = 1$ ergibt wegen des 1. Falles nur noch $z = 1$.

Der Konvergenzradius ist gegeben durch den kleinsten Abstand des Entwicklungspunktes z_0 zur nächsten Definitionslücke.

Für $z_0 = \dfrac{11}{8}$ ergibt sich
$r_1 = \min\left\{\left|\dfrac{3}{2} - \dfrac{11}{8}\right|, \left|1 - \dfrac{11}{8}\right|\right\} = \min\left\{\dfrac{1}{8}, \dfrac{3}{8}\right\} = \dfrac{1}{8}$.
Für $z_0 = 0$ ergibt sich $r_2 = \min\left\{\left|\dfrac{3}{2} - 0\right|, |1-0|\right\} = 1$.

Abgabetermin: 23.6.