

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 5

Aufgabe 1:

Für $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^3$ berechne man

a) $A := \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0))$ und

b) $B := \frac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0))$.

Man vergleiche die Ergebnisse mit den Ableitungen von f nach den unabhängigen Variablen z und \bar{z} , also mit

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Dabei sollen die bekannten Ableitungsregeln aus dem Reellen rein formal übertragen werden.

Aufgabe 2:

a) Man entscheide (mit Begründung), ob

(i) $f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + 4i \cdot \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i$ holomorph ist,

(ii) $g(z) = \operatorname{Re}(e^z)$ holomorph ist,

(iii) $\operatorname{Re}(z^{10} + \sin^7 z)$ harmonisch ist.

b) Gegeben sei die Funktion

$$v(x, y) = 2xy - 6y + e^x \sin y.$$

(i) Man zeige, dass v harmonisch ist.

(ii) Zu $v(x, y)$ bestimme man eine Funktion $u(x, y)$, so dass die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 3:

Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = it$ und $c_2(t) = e^{it}$ jeweils für $0 < t < \pi$.

- a) Man skizziere die Kurven c_1 und c_2 in der z -Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.
- b) In welche Bildkurven der w -Ebene gehen c_1 und c_2 unter dem Hauptwert von $w = \ln z$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

Bearbeitungstermine: 5.6. - 9.6.