Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabenblatt 5, Lösungen

Aufgabe 1:

a) Man skizziere die Gerade $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ und den Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| = \sqrt{5}\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu G und K liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von G und K unter T, wenn noch $T(-1) = -1$ gilt.

Lösung:

a)

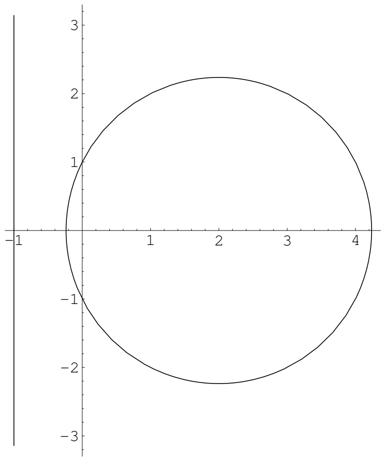

Bild 1 a): Gerade G und Kreis K

Da z_1 und z_2 symmetrisch zur Geraden G liegen, steht die durch beide Punkte verlaufende Gerade H senkrecht zu G. Diese Gerade H verläuft, wegen der Symmetrie der Punkte zu K, auch durch den Mittelpunkt $z_0 = 2$ von K. Damit ist H die reelle Achse und es gilt $z_{1,2} \in \mathbb{R}$.

Aus der Symmetrie zu G folgt $z_1 = -1 + a$ und $z_2 = -1 - a$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Symmetrie zu $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = \sqrt{5}\}$ liefert die Bedingung

$$\begin{aligned} 5 = (\sqrt{5})^2 &= (z_1 - z_0)(\bar{z}_2 - \bar{z}_0) \\ &= (-1 + a - 2)(-1 - a - 2) \\ &= -(a-3)(a+3) = -(a^2 - 9) \\ \Rightarrow a^2 &= 4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ \Rightarrow z_1 = -1 \pm 2 = 1 \vee -3 \quad &, \quad z_2 = -1 \mp 2 = -3 \vee 1 \end{aligned}$$

b) Mit

$$T(z) = k \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad k \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$$

gilt $w_1 = T(z_1) = 0$ und $w_2 = T_2(z_2) = \infty$.

T ist eine Möbius-Transformation wegen $k \neq 0$, denn $ad - bc = k(z_1 - z_2) \neq 0$.

T ist holomorph für $z \in \mathbb{C} \backslash \{z_2\}$ und deshalb auch konform in diesem Gebiet, da $T'(z) = \dfrac{ad - bc}{(z - z_2)^2} \neq 0$ gilt.

c) Da z_1 und z_2 symmetrisch zu G und K liegen, liegen auch $w_1 = 0$ und $w_2 = \infty$ symmetrisch zu den Bildkreisen $T(G)$ und $T(K)$. Damit müssen $T(G)$ und $T(K)$ Kreise um den Ursprung sein, denn z_2 liegt nicht auf G oder K und damit liegt $T(z_2) = \infty$ auch nicht auf $T(G)$ oder $T(K)$.

Da $z_3 = -1$ auf G liegt, wird G wegen $T(-1) = -1$ auf den Einheitskreis abgebildet.

Aus $T(-1) = -1 = k \cdot \dfrac{-1 - z_1}{-1 - z_2} = -k$ folgt $k = 1$ und

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

Für $z_1 = 1$ und $z_2 = -3$ ergibt sich $\quad T_1(z) = \dfrac{z - 1}{z + 3}$.

Für $z_1 = -3$ und $z_2 = 1$ ergibt sich $\quad T_2(z) = \dfrac{z + 3}{z - 1}$.

Zur Kontrolle überprüfen wir nochmal, ob $T_1(G)$ der Einheitskreis ist:

$$|T_1(-1 + it)| = \left| \frac{-1 + it - 1}{-1 + it + 3} \right| = \frac{\sqrt{4 + t^2}}{\sqrt{4 + t^2}} = 1 .$$

Der Radius R von $T(K)$ kann, da $z_4 = 2 + \sqrt{5}$ auf K liegt, durch $R = |T(2+\sqrt{5})|$ bestimmt werden.

Konkret ergibt sich für T_1

$$R_1 = \left|\frac{2+\sqrt{5}-1}{2+\sqrt{5}+3}\right| = \left|\frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.447$$

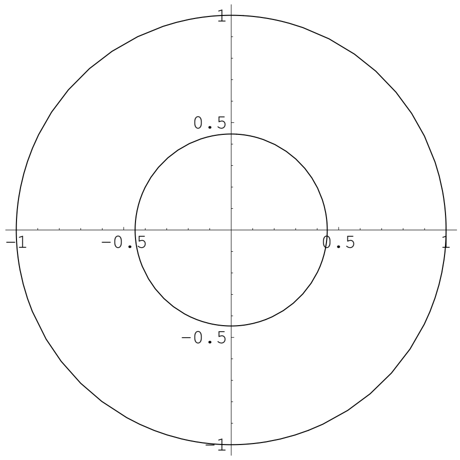

Bild 1 c): Kreise $T_1(G)$ und $T_1(K)$

Da z_1 im Inneren von K liegt, wird das Gebiet rechts von G ohne die zu K gehörige Kreisscheibe auf den Kreisring $\{w \in \mathbb{C} \mid R_1 < |w| < 1\}$ abgebildet.

Im anderen Fall, d.h. mit T_2 erhält man $R_2 = 1/R_1 = \sqrt{5} \approx 2.236$ und den Kreisring $\{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < \sqrt{5}\}$. Dabei wird das Innere von K auf das Außengebiet abgebildet und die links von G liegende Ebene auf das Innere des Einheitskreises.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die rechts der Geraden $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it\,,\; t \in \mathbb{R}\}$ liegende Halbebene E ohne die Kreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq \sqrt{5}\}$.

Man berechne eine in E harmonische Funktion, die auf dem Rand von K den Wert 1 und auf G den Wert 0 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 1 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Lösung:

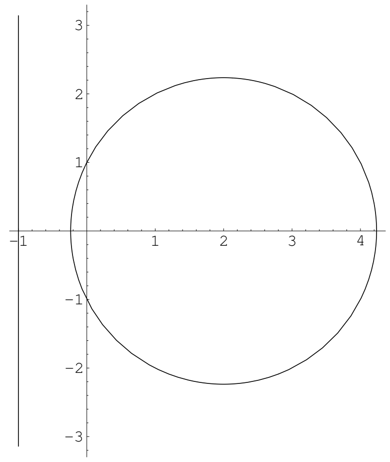

Bild 2 a): Halbebene E ohne die Kreisscheibe K

Gesucht ist die reellwertige Funktion $u : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für die mit $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in E \\ u(x,y) &= 0 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in G \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in K\,. \end{aligned}$$

Das Gebiet E wird jetzt beispielsweise durch die konforme Möbius-Transformation

$$T_2(z) = \frac{z+3}{z-1}$$

aus Aufgabe 1 auf den Kreisring

$$T_2(E) = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < \sqrt{5}\}$$

abgebildet. Die konform verpflanzte Funktion lautet mit $T_2(z) = w = \xi + i\eta$

$$U(\xi,\eta) = U(w) := u(T_2^{-1}(w))$$

und erfüllt wegen des zweiten konformen Verpflanzungssatzes:
$\Delta u = \Delta U \cdot |T_2'(z)|^2$ und $T_2'(z) \neq 0$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned}
\Delta U(\xi,\eta) &= 0 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T_2(E)\\
U(\xi,\eta) &= 0 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T_2(G)\\
U(\xi,\eta) &= 1 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T_2(K)\,.
\end{aligned}$$

Dieses Problem im Kreisring $T_2(E)$ lässt sich besser in Polarkoordinaten lösen, deshalb wird erneut mit $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$, $1 \le r \le \sqrt{5}$,
$0 \le \varphi < 2\pi$ und $v(r,\varphi) := U(\xi(r,\varphi),\eta(r,\varphi))$ transformiert und das Problem lautet jetzt

$$\begin{aligned}
v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{für alle} \quad 1 \le r \le \sqrt{5}\,, \quad 0 \le \varphi < 2\pi\\
v(\sqrt{5},\varphi) &= 1\,, \quad 0 \le \varphi < 2\pi\\
v(1,\varphi) &= 0\,.
\end{aligned}$$

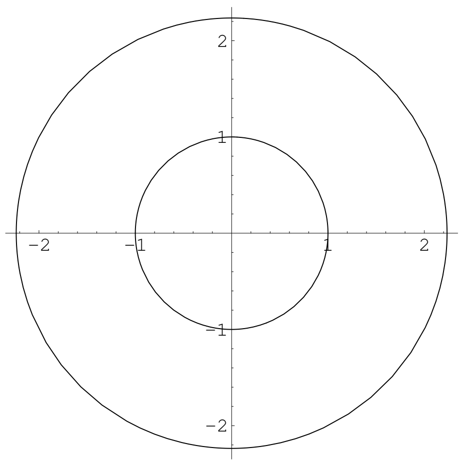

Bild 2 b): $T_2(E\backslash K) = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < \sqrt{5}\}$

Auf Grund der Gebietssymmetrie und der Rotationssymmetrie der Randdaten liegt die Vermutung nahe, dass dieses Problem eine rotationssymmetrische Lösung besitzt, d.h. $v(r,\varphi) = v(r)$. Das Problem vereinfacht sich so zu einer Randwertaufgabe mit gewöhnlicher Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
v_{rr} + \frac{1}{r}v_r &= 0 \quad \text{für alle} \quad 1 < r < \sqrt{5}\\
v(\sqrt{5}) &= 1\,,\\
v(1) &= 0\,,
\end{aligned}$$

deren allgemeine Lösung lautet $v(r) = c_1 \ln r + c_2$. Anpassen an die Randdaten liefert

$$0 = v(1) = c_1 \ln 1 + c_2 = c_2 \qquad \text{und} \qquad 1 = v(\sqrt{5}) = c_1 \ln\sqrt{5} \;\Rightarrow\; c_1 = 1/\ln\sqrt{5}\,.$$

Die gesuchte Lösung in Polarkoordinaten lautet somit

$$v(r,\varphi) = v(r) = \frac{\ln r}{\ln\sqrt{5}}\,.$$

Rücktransformation in die $w-$ Ebene ergibt dort die Lösung

$$U(w) = \frac{\ln|w|}{\ln\sqrt{5}} \, .$$

Rücktransformation in die $z-$ Ebene ergibt dort die Lösung

$$u(z) = \frac{\ln|T_2(z)|}{\ln\sqrt{5}} \, .$$

Mit $z = x + iy$ und

$$|T_2(z)| \;=\; \left|\frac{z+3}{z-1}\right| = \left(\frac{(x+3)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}\right)^{1/2} \;=\; \left(\frac{x^2+y^2+6x+9}{x^2+y^2-2x+1}\right)^{1/2}$$

ergibt sich in der $(x, y)-$ Ebene die Lösungsdarstellung

$$u(x,y) = \frac{1}{2\ln\sqrt{5}} \ln\left(\frac{x^2+y^2+6x+9}{x^2+y^2-2x+1}\right) \, .$$

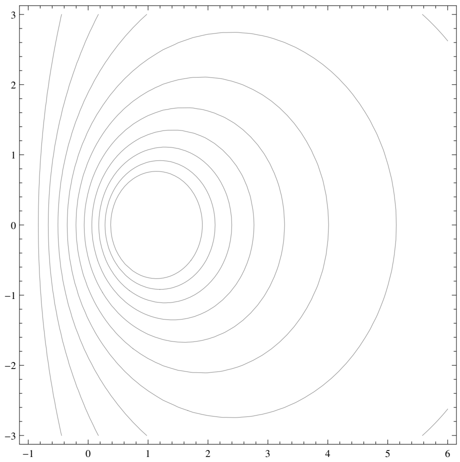

Bild 2 c): Höhenlinien der Lösung $u(x,y)$

Abgabetermin: 9.6.