Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 4, Lösungen

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Abbildung $T:\ \mathbb{C}^* \ \to\ \mathbb{C}^*$ mit

$$T(z) = \frac{z+2}{z-2}\,\cdot$$

a) Handelt es sich bei T um eine Möbius-Transformation?

b) Man berechne die Umkehrabbildung.

c) Man bestimme das Bild der reellen Achse.

d) Man bestimme das Bild des Kreises $|z| = 2\,$.

e) Man bestimme das Bild der imaginären Achse.

f) Wohin wird der Halbkreis H abgebildet?

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\,,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$

Lösung:

$$T(z) = \frac{z+2}{z-2} \quad \left(= \frac{az+b}{cz+d}\right)\,.$$

a) T ist eine Möbius-Transformation, denn $ad - bc = 1\cdot(-2) - 2\cdot 1 = -4 \neq 0\,.$

b) Durch Auflösen von $w = \dfrac{z+2}{z-2}$ nach z erhält man die Umkehrabbildung:

$$w(z-2) = z+2 \Rightarrow -2w-2 = z(1-w) \Rightarrow z = T^{-1}(w) = \frac{2w+2}{w-1}$$

c) Für die reelle Achse gilt $z = x \in \mathbb{R}$. Damit erhält man

$$T(z) = T(x) = \frac{x+2}{x-2} \in \mathbb{R} .$$

Also wird die reelle Achse auf sich selbst abgebildet.

d) Wegen $T(2) = \infty$ (Bild ist Gerade), $T(-2) = 0$ (durch Null) und $T(2i) = -i$ handelt es sich beim Bild um die imaginäre Achse.

e) Da die imaginäre Achse symmetrisch zur reellen Achse und zum Kreis $|z| = 2$ ist, gilt diese Symmetrie auch im Bildraum.

Also ist das Bild der imaginären Achse ein echter Kreis um Null, mit Radius $R = |T(2i)| = |-i| = 1$, also der Einheitskreis.

f) Die Kreisscheibe $|z| \leq 2$ wird wegen $T(0) = -1$ auf die linke Halbebene abgebildet, d.h. auf $\mathrm{Re}(w) \leq 0$.

Die obere Halbebene wird wegen $T(2i) = -i$ auf die untere Halbebene abgebildet, d.h. auf $\mathrm{Im}(w) \leq 0$.

Also wird

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\,,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$

auf den dritten Quadranten abgebildet:

$$Q_3 := \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(w) \leq 0\,,\ \mathrm{Im}(w) \leq 0\}\ .$$

Aufgabe 2:

Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$ mit $T(-1) = 1$ und $T(0) = 0$, die die linke Halbebene $\mathrm{Re}\,(z) \le 0$ auf die Kreisscheibe $|w-1| \le R$ abbildet. Wie groß ist R?

Lösung:

Die Lösungsidee besteht darin, dass die imaginäre Achse auf den Kreis $|w-1| = R$ abgebildet wird.

$z_1 = -1$ wird auf den Mittelpunkt $w_1 = 1$ der Kreisscheibe $|w-1| \le R$ abgebildet. Der bezüglich der imaginären Achse zu z_1 symmetrische Punkt $z_3 = 1$ wird auf den zu $w_1 = 1$ symmetrischen Punkt des Bildkreises $w_3 = \infty$ abgebildet.

Damit wird die imaginäre Achse auf $|w-1| = R$ abgebildet.

Die Möbius-Transformation $w = T(z)$ ergibt sich mit $z_2 = 0$ und $T(z_2) = w_2 = 0$ dann aus der Dreipunkteformel

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} = \frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}.$$

Man erhält

$$\frac{z-(-1)}{z} : \frac{1-(-1)}{1} = \frac{w-1}{w} : \frac{w_3-1}{w_3}\bigg|_{w_3\to\infty} \quad \Rightarrow \quad \frac{z+1}{2z} = \frac{w-1}{w}$$

$$\Rightarrow \; w(z+1) = (w-1)2z \Rightarrow \; w(-z+1) = -2z \;\Rightarrow\; w = T(z) = \frac{2z}{z-1}$$

$z_2 = 0$ liegt auf der imaginären Achse und wird auf den Bildkreis $|w-1| = R$ abgebildet. Damit ergibt sich der Radius

$$R = |T(0) - 1| = 1\,.$$

$z_1 = -1$ liegt in der linken Halbebene und wird auf den Mittelpunkt der Kreisscheibe $|w-1| \le 1$ abgebildet. Aus Stetigkeitsgründen wird die linke Halbebene daher auf die Kreisscheibe abgebildet.

Bearbeitungstermine: 22.5.-26.5.