Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabenblatt 4, Lösungen

Aufgabe 1:

Für die Inversion $w = f(z) := \dfrac{1}{z}$ mit $z \neq 0$ bestimme man das Bild

a) der Geraden $\mathrm{Re}(z) = 2\,,$

b) des Strahls $\mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) = 0\,,$

c) des Kreises $|z| = 3\,,$

d) des Kreises $|z - 2i| = 2$ und

e) des Kreises $|z - 2i| = 1.$

Lösung:

Die Umkehrabbildung der Inversion $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$ lautet

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{w}\,,$$

wobei $z \neq 0$ und $w \neq 0$. Damit ergeben sich folgende Bilder

a) $2 = \mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{\bar{w}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 4w\bar{w} - w - \bar{w} = 0$

$\Leftrightarrow \ \dfrac{1}{16} = w\bar{w} - \dfrac{1}{4}w - \dfrac{1}{4}\bar{w} + \dfrac{1}{16} \ \Leftrightarrow \ \left(w - \dfrac{1}{4}\right)\left(\bar{w} - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{16}$

$\Leftrightarrow \ \left|w - \dfrac{1}{4}\right| = \dfrac{1}{4}$

Bild von $\mathrm{Re}(z) = 2$ ist der Kreis um $w_0 = \dfrac{1}{4}$ mit Radius $r = \dfrac{1}{4}\,.$

b) $\mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x}$

Der Strahl wird auf sich selbst abgebildet nur umgekehrt durchlaufen.

c) $3 = |z| = \left|\dfrac{1}{w}\right| \quad \Leftrightarrow \quad |w| = \dfrac{1}{3}\,.$

Der Ursprungskreis vom Radius 3 wird in den Ursprungskreis vom Radius $\dfrac{1}{3}$ abgebildet.

d) $|z - 2i| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 = z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} + 4 = \dfrac{1}{w}\dfrac{1}{\bar{w}} + 2i\dfrac{1}{w} - 2i\dfrac{1}{\bar{w}} + 4$

$\Leftrightarrow \quad -2i(w - \bar{w}) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(w) = -\dfrac{1}{4}\,.$

Das Bild des Kreises ist die Gerade $\mathrm{Im}(w) = -\dfrac{1}{4}\,.$

e) $|z - 2i| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} + 4 = \dfrac{1}{w}\dfrac{1}{\bar{w}} + 2i\dfrac{1}{w} - 2i\dfrac{1}{\bar{w}} + 4$

$\Leftrightarrow \; w\bar{w} + \dfrac{2i}{3}\bar{w} - \dfrac{2i}{3}w + \dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; \left|w + \dfrac{2i}{3}\right| = \dfrac{1}{3}\,.$

Das Bild des Kreises ist der Kreis um $w_0 = -\dfrac{2i}{3}$ mit Radius $r = \dfrac{1}{3}\,.$

Aufgabe 2:

Gegeben seien die Punkte

$$z_1 = 1,\ z_2 = 1 + 2i,\ z_3 = i$$

und

$$w_1 = 0,\ w_2 = 1 + i,\ w_3 = -1 - i\ .$$

a) Man berechne die Möbius-Transformation T, für die mit $j = 1, 2, 3$ gilt:

$$w_j = T(z_j)\ .$$

b) Liegen $z_0 = 2 + i$ und z_1, z_2, z_3 auf einem (verallgemeinerten) Kreis K ?

c) Liegen $w_0 = T(z_0)$ und w_1, w_2, w_3 auf einem (verallgemeinerten) Kreis $T(K)$?

Lösung:

a) Da $z_j, j = 1, 2, 3$ voneinander verschieden sind und dies auch für $w_j, j = 1, 2, 3$ gilt, gibt es genau eine Möbius-Transformation T mit $w_j = T(z_j)$, die man durch Auflösen der Dreipunkteformel nach w erhält:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\ .$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$\frac{w}{w - 1 - i} : \underbrace{\frac{-1 - i}{-1 - i - 1 - i}}_{=1/2} = \frac{z - 1}{z - 1 - 2i} : \underbrace{\frac{i - 1}{i - 1 - 2i}}_{=1/i} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2w}{w - 1 - i} = \frac{i(z - 1)}{z - 1 - 2i} \quad \Rightarrow \quad 2w(z - 1 - 2i) = i(z - 1)(w - 1 - i) \quad \Rightarrow$$

$$w(2z - 2 - 4i - i(z - 1)) = (1 - i)(z - 1) \quad \Rightarrow$$

$$w = \frac{(1 - i)z - (1 - i)}{(2 - i)z - 2 - 3i} =: T(z)$$

b) Das Doppelverhältnis für $z_0 = 2 + i$ ergibt

$$\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$
$$= \frac{2 + i - 1}{2 + i - 1 - 2i} : \frac{i - 1}{i - 1 - 2i} = \frac{(1 + i)(-1 - i)}{(1 - i)(i - 1)} = -1 \in \mathbb{R}$$

Daher liegen $z_0, \ldots, z_3$ auf einem Kreis.

Mit einer Probe stellt man fest, dass es sich um den Kreis $|z - 1 - i| = 1$ handelt.

c) Antwort 1:
Da Möbius-Transformationen verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise abbilden, liegen auch $w_0, \ldots, w_3$ auf einem verallgemeinerten Kreis (hier: die Winkelhalbierende).

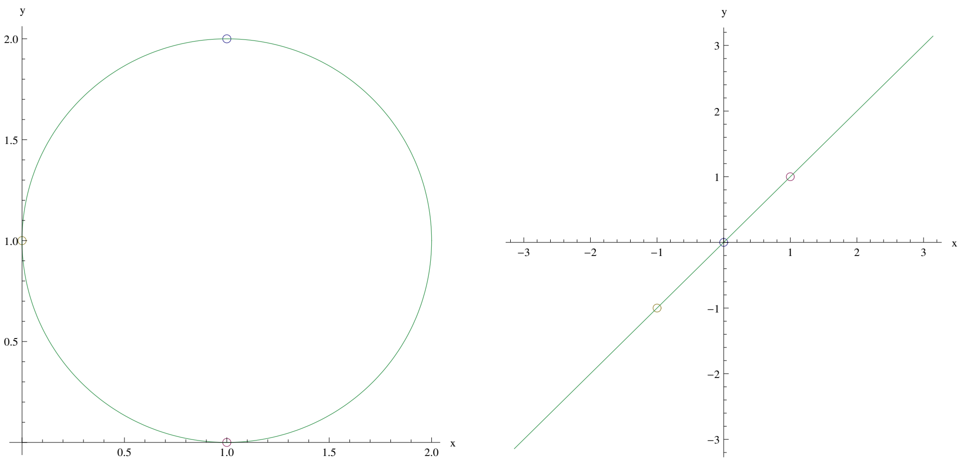

Bild 2: z_1, z_2, z_3 und K $\qquad$ w_1, w_2, w_3 und $T(K)$

Antwort 2:
Da T aus der Dreipunkteformel resultiert und $w_0 = T(z_0)$ gilt, erhält man für das Doppelverhältnis von $w_0, \ldots, w_3$

$$\frac{w_0 - w_1}{w_0 - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = -1 \in \mathbb{R}\,,$$

d.h. das Doppelverhältnis ändert sich unter T nicht.

Bearbeitungstermine: 22.5.-26.5.