Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 3, Lösungen

Aufgabe 1:
Man bestimme das Bild von

$$K := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z) \,,\; 0 \le \mathrm{Im}(z) \,,\; \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \le 1 \right\}$$

unter der durch $f(z) = ((1+i)z)^2$ definierten Abbildung.

Lösung:

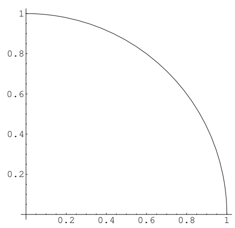

Bild 1.1 $K := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z) \,,\; 0 \le \mathrm{Im}(z) \,,\; \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \le 1\}$

Die Abbildung $f(z) = ((1+i)z)^2$ wird interpretiert als Hintereinanderausführung $f = f_2 \circ f_1$ mit $f_1(z) = (1+i)z$ und $f_2(u) = u^2$.

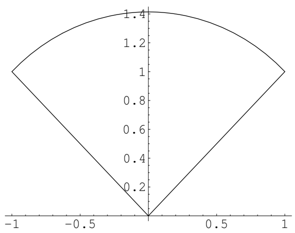

Bild 1.2 $f_1(K)$

Die Funktion $f_1(z) = (1+i)z = \sqrt{2}e^{\pi i/4} r e^{\varphi i} = r\sqrt{2}e^{(\pi/4+\varphi)i}$ bewirkt eine Streckung um den Faktor $\sqrt{2}$ und eine Drehung um den Winkel $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

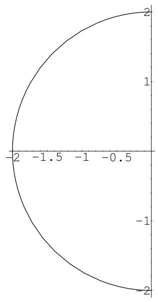

Bild 1.3 $f(K) = f_2(f_1(K))$

Die Funktion $f_2(u) = u^2 = \left(re^{\psi i}\right)^2 = r^2 e^{2\psi i}$ verdoppelt den Winkel und quadriert den Abstand vom Nullpunkt.

Alternative Hintereinanderausführung von f :

Für $f(z) = ((1+i)z)^2 = (1+i)^2 z^2 = 2iz^2$ kann man auch $f = f_4 \circ f_3$ mit $f_3(z) = z^2$ und $f_4(u) = 2iu$ deuten. Dann ergibt sich

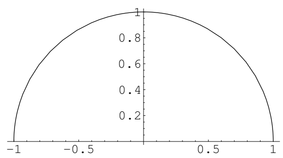

Bild 1.4 $f_3(K)$

Die Funktion $f_4(u) = 2iu = e^{\pi i/2} re^{\varphi i} = 2re^{(\pi/2+\varphi)i}$ bewirkt eine Streckung um den Faktor 2 und eine Drehung um den Winkel $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

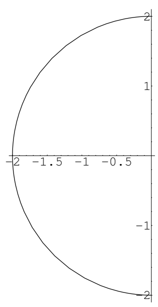

Bild 1.5 $f(K) = f_4(f_3(K))$

Aufgabe 2:

Für die Exponentialfunktion $\exp$ bestimme man die Bilder folgender Mengen

a) $D_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z) \le \ln(10)\,,\ -\frac{\pi}{2} \le \mathrm{Im}(z) \le \frac{\pi}{2}\right\}$,

b) $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \le 0\,,\ 0 \le \mathrm{Im}(z) < \pi\}$,

c) $D_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$.

Lösung:

a)

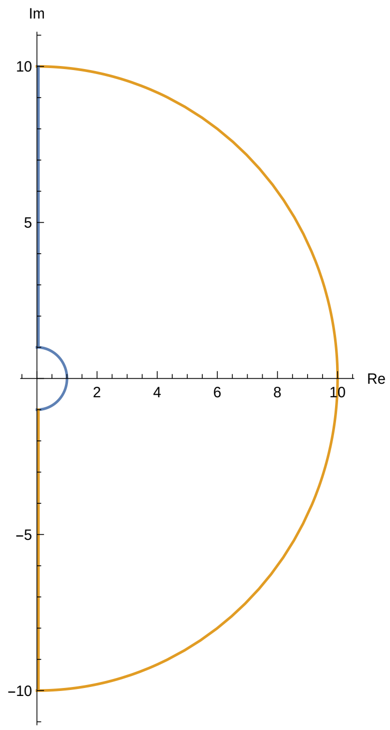

Bild 2 a) Halbkreisring $\exp(D_1)$

b)

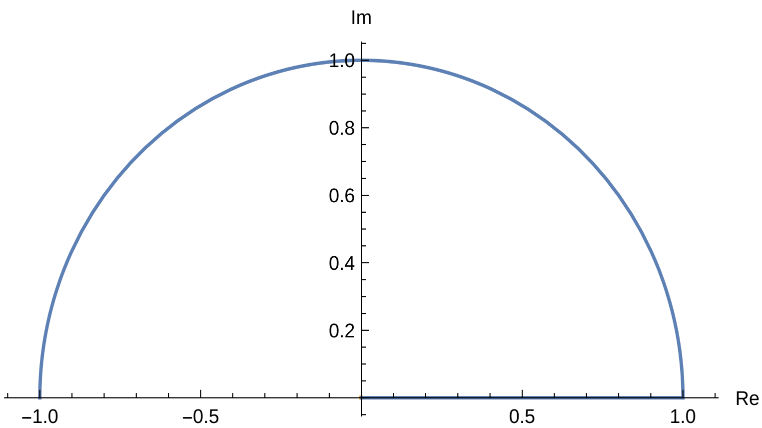

Bild 2 b) Halbkreis $\exp(D_2)$

c) aufgeschnittene komplexe Ebene: $\exp(D_3) = \mathbb{C}^-$

Aufgabe 3:

a) Gegeben seien $z_1 = 2 + \dfrac{\pi i}{3}$ und $z_2 = -1 + \dfrac{2\pi i}{3}$. Man berechne

$$\exp(z_1)\ ,\ \exp(z_2) \quad \text{und} \quad \exp(z_1 + z_2)$$

in kartesischen Koordinaten und bestätige an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der $\exp$-Funktion in $\mathbb{C}$:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)\ .$$

b) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus $\log$ und $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ und $z_2 = -2i$ berechne man

$$\log(z_1)\ ,\ \log(z_2) \quad \text{und} \quad \log(z_1 z_2),$$

und überprüfe an diesem Beispiel, ob für den Hauptwert die Funktionalgleichung gilt:

$$\log(z_1) + \log(z_2) = \log(z_1 z_2)\ .$$

Lösung:

a) $\exp(z_1) = \exp\left(2 + \dfrac{\pi i}{3}\right) = e^2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{e^2}{2} + i\dfrac{e^2\sqrt{3}}{2}$

$$\exp(z_2) = \exp\left(-1 + \frac{2\pi i}{3}\right) = e^{-1}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{1}{2e} + i\frac{\sqrt{3}}{2e}$$

$\exp(z_1 + z_2) = \exp(1 + \pi i) = e\,(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -e$

Damit erhält man

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = e^2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -e = \exp(z_1 + z_2)\ .$$

b) Der Hauptwert $\log(z)$ des Logarithmus (auch kurz $\ln(z)$) ist definiert für $-\pi < \arg(z) < \pi$ durch

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)\ .$$

$$\log(z_1) = \log(-1 - i\sqrt{3}) = \ln|-1 - i\sqrt{3}| + i\arg(-1 - i\sqrt{3}) = \ln(2) - i\frac{2\pi}{3}$$

$$\log(z_2) = \log(-2i) = \ln|-2i| + i\arg(-2i) = \ln(2) - i\frac{\pi}{2}$$

$$\log(z_1) + \log(z_2) = \ln(2) - i\frac{2\pi}{3} + \ln(2) - i\frac{\pi}{2} = \ln(4) - i\frac{7\pi}{6}$$

$z_1 z_2 = -2i(-1 - i\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} + 2i$

$\log(z_1 z_2) = \log(-2\sqrt{3} + 2i) = \ln|-2\sqrt{3} + 2i| + i\arg(-2\sqrt{3} + 2i)$
$= \ln(4) + i\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \ln(4) + i\frac{5\pi}{6}$
Die Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion

$$\log(z_1) + \log(z_2) = \ln(4) - i\frac{7\pi}{6} \neq \ln(4) + i\frac{5\pi}{6} = \log(z_1 z_2)$$

gilt für den Hauptwert bei diesem Beispiel nicht.

Die Winkel $-\frac{7\pi}{6}$ und $\frac{5\pi}{6}$ beschreiben zwar prinzipiell den gleichen Winkel im Kreis, jedoch unterscheiden sie sich um einen vollen Umlauf von 2π.

Dies führt dazu, dass $\log(z_1) + \log(z_2)$ auf einen Nebenzweig des komplexen Logarithmus führt. Für die Umkehrfunktionen $\exp$ gilt natürlich

$$\exp\left(\ln(4) - i\frac{7\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = z_1 z_2 = \exp\left(\ln(4) + i\frac{5\pi}{6}\right).$$

Bearbeitungstermine: 2.5.-5.5.