

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Hausaufgabenblatt 3, Lösungen

Aufgabe 1:

Die \cos -Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) .$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von $\cos z$ und bestimme alle Lösungen von $\cos z = 3$.

Lösung:

Mit $z = x + iy$ gilt:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2} (e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)) \\ &= \cos x \cdot \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) - i \sin x \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \end{aligned}$$

$$3 = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad \Rightarrow \quad \sin x \sinh y = 0$$

1.Fall:

$$\sinh y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 = \cos x \cosh 0 = \cos x \quad \text{keine Lösung}$$

2.Fall:

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = k\pi \quad \Rightarrow \quad 3 = \cos(k\pi) \cosh y \quad \Rightarrow \quad k = 2n, \quad y = \pm \operatorname{arcosh} 3$$

$$\Rightarrow \quad z_n = 2n\pi \pm i \operatorname{arcosh} 3, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Joukowski-Funktion $w = f(z) := \frac{1}{2} \left(\frac{z}{4} + \frac{4}{z} \right)$.

- a) Man bestimme die Bilder
- (i) des Kreises $|z| = 5$,
 - (ii) des Halbstrahls $\operatorname{Re}(z) < 0$, $\operatorname{Im}(z) = 0$,
 - (iii) des Halbstrahls $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) < 0$.
- b) Man berechne die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ für $|z| > 4$.

Lösung:

- a) (i) Mit der Polardarstellung $z = 5e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ auf dem Kreis $|z| = 5$ erhält man:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{5e^{i\varphi}}{4} + \frac{4}{5e^{i\varphi}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4}(\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{4}{5}(\cos \varphi - i \sin \varphi) \right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{5}{8} + \frac{4}{10} \right)}_{=u} \cos \varphi + i \underbrace{\left(\frac{5}{8} - \frac{4}{10} \right)}_{=v} \sin \varphi. \end{aligned}$$

$u = \operatorname{Re}(f)$ und $v = \operatorname{Im}(f)$ erfüllen die Ellipsengleichung

$$\frac{u^2}{\left(\frac{5}{8} + \frac{4}{10}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{5}{8} - \frac{4}{10}\right)^2} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Der Kreis $|z| = 5$ wird also auf eine Ellipse abgebildet.

Mathematica Plot-Befehl

```
ParametricPlot[{(5/8 + 4/10) Cos[t],
(5/8 - 4/10) Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi},
AxesLabel -> {"Re", "Im"}, PlotRange -> {-1, 1}]
```

Halbachsen:

$$a = \frac{5}{8} + \frac{4}{10} = \frac{41}{40} = 1.025, \quad b = \frac{5}{8} - \frac{4}{10} = \frac{9}{40} = 0.225$$

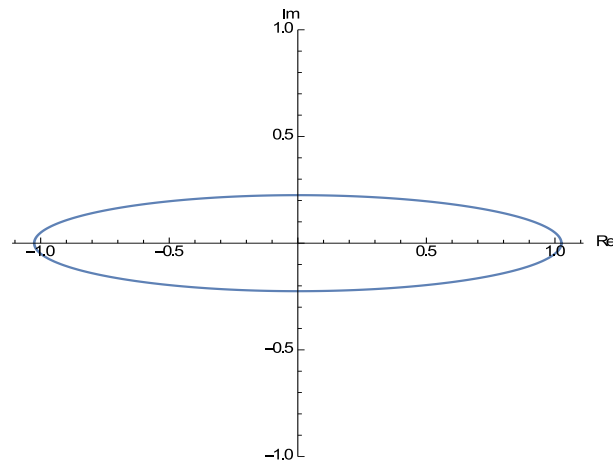


Bild 2 a)(i): Ellipse

- (ii) Aus der Polardarstellung $z = re^{i\pi} = -r$, $0 < r < \infty$ des Halbstrahls $\operatorname{Re}(z) < 0$, $\operatorname{Im}(z) = 0$ folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{-r}{4} + \frac{4}{-r} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{4} + \frac{4}{r} \right) =: g(r)$$

Es $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = -\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} g(r)$ und

$$0 \geq -\left(\frac{r}{2} - 2\right)^2 = -\frac{r^2}{4} + 2r - 4 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{4} + \frac{4}{r} \right) \leq -1.$$

$r = 4$ ist das Maximum von g mit $g(4) = -1$. Natürlich gilt auch

$$g'(r) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{r^2} \right) = -\frac{r^2 - 16}{8r^2} = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 4 \Rightarrow r = 4.$$

Das Bildintervall $] -\infty, -1]$ wird also doppelt durchlaufen.

- (iii) Aus der Polardarstellung $z = re^{i3\pi/2} = -ir$, $0 < r < \infty$ des Halbstrahls $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) < 0$ folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{-ir}{4} + \frac{4}{-ir} \right) = -i \underbrace{\left(\frac{r}{8} - \frac{2}{r} \right)}_{=t} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

Das Bild ist also die imaginäre Achse.

- b) Die Umkehrfunktion von f ergibt sich durch Auflösen von $w = f(z)$ nach z :

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{4} + \frac{4}{z} \right) \Rightarrow 8wz = z^2 + 16 \\ \Rightarrow z^2 - 8wz + 16 &= (z - 4w)^2 - 16w^2 + 16 = 0 \Rightarrow (z - 4w)^2 = 16(w^2 - 1) \\ \Rightarrow z &= f^{-1}(w) = 4(w + \sqrt{w^2 - 1}) \end{aligned}$$

Für $\sqrt{w^2 - 1}$ ist dabei der Zweig zu wählen, für den $|z| > 4$ gilt.