

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 2, Lösungen

Aufgabe 1:

Man skizziere die folgenden Punktmenen in der komplexen Zahlenebene:

- a) $\{z \in \mathbb{C} : |3z + 6 - i| = 9\}$,
- b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z)\}$,
- c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}((1 - i)z) = 2\}$,
- d) $\{z \in \mathbb{C} : \pi \leq \arg(z) \leq 3\pi/2, 4 \leq |z| \leq 5\}$.

Lösung:

$$\text{a) } |3z + 6 - i| = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \left| z + 2 - \frac{i}{3} \right| = 3$$

Mit der kartesischen Darstellung $z = x + iy$ erhält man:

$$\begin{aligned} \left| z + 2 - \frac{i}{3} \right| &= \left| x + iy + 2 - \frac{i}{3} \right| = \left| x + 2 + i \left(y - \frac{1}{3} \right) \right| \\ &= \sqrt{(x + 2)^2 + \left(y - \frac{1}{3} \right)^2} = 3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + \left(y - \frac{1}{3} \right)^2 = 3^2$$

Kreis vom Radius $r = 3$ um den Punkt $\left(-2, \frac{1}{3} \right)$.

$$\text{b) } \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z)\}$$

Mit $z = x + iy$ erhält man $x \leq y$, also die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden $x = y$.

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad 2 &= \operatorname{Re}((1-i)z) = \operatorname{Re}((1-i)(x+iy)) \\ &= \operatorname{Re}(x+y+i(-x+y)) = x+y \end{aligned}$$

Die Punktmenge wird also durch folgende Gerade beschrieben:

$$y = -x + 2.$$

- d) $\{z \in \mathbb{C} : \pi \leq \arg(z) \leq 3\pi/2, 4 \leq |z| \leq 5\}$ ist der Viertelkreisring im dritten Quadranten mit Radius $4 \leq r \leq 5$.

Aufgabe 2:

- a) Für $z \in \mathbb{C}$ sei das Polynom $p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ mit reellen Koeffizienten a_0, \dots, a_n gegeben.

Man zeige:

Wenn $z_0 \in \mathbb{C}$ Nullstelle von p ist, dann ist auch \bar{z}_0 Nullstelle von p .

- b) Man zeige, dass der Kreis $|z - z_0| = r$ in der komplexen Ebene auch die folgende Darstellung besitzt

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = r^2 \quad \text{mit } z, z_0 \in \mathbb{C}.$$

- c) Man bestimme die Kurve, die durch

$$z\bar{z} = (4 - 3i)\bar{z} + (4 + 3i)z + 144$$

beschrieben wird.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad p(\bar{z}_0) &= a_n (\bar{z}_0)^n + a_{n-1} (\bar{z}_0)^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 \\ &= a_n \overline{z_0^n} + a_{n-1} \overline{z_0^{n-1}} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 \\ &= \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z_0} + \bar{a}_0 = \overline{p(z_0)} = \bar{0} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad |z - z_0| = r \stackrel{\geq 0}{\Leftrightarrow} r^2 = |z - z_0|^2 = (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + \bar{z}_0 z_0$$

- c) Ein Vergleich mit der Kreisdarstellung ergibt

$$z_0 = (4 - 3i) \quad \text{und} \quad r^2 - z_0 \bar{z}_0 = 144$$

$$\Rightarrow z_0 \bar{z}_0 = 25 \quad \Rightarrow r^2 = z_0 \bar{z}_0 + 144 = 25 + 144 = 169$$

Die Kurve beschreibt also einen Kreis um $z_0 = (4 - 3i)$ mit Radius $r = 13$.

Aufgabe 3:

Man untersuche die Folge

$$z_0 = 3, \quad z_{n+1} = \frac{3-2i}{4}(1+2i+z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

Lösung:

Wenn z_n konvergiert, so gilt mit $z^* := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1}$:

$$z^* = \frac{3-2i}{4}(1+2i+z^*)$$

$$\Rightarrow z^* \left(1 - \frac{3-2i}{4}\right) = z^* \left(\frac{1+2i}{4}\right) = \frac{(1+2i)(3-2i)}{4}$$

$$\Rightarrow z^* = 3 - 2i.$$

z_n konvergiert, da

$$\begin{aligned} |z_{n+1} - z^*| &= |z_{n+1} - (3-2i)| = \left| \frac{3-2i}{4}(1+2i+z_n) - (3-2i) \right| \\ &= \left| \frac{3-2i}{4} \right| |1+2i+z_n - 4| = \frac{\sqrt{13}}{4} |z_n - (3-2i)| \\ &= \left(\frac{\sqrt{13}}{4} \right)^2 |z_{n-1} - (3-2i)| \\ &\vdots \\ &= \left(\frac{\sqrt{13}}{4} \right)^{n+1} |z_0 - (3-2i)| = 2 \left(\frac{\sqrt{13}}{4} \right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Bearbeitungstermine: 17.4. - 21.4.