Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 1, Lösungen

Aufgabe 1:

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 2i$ und $z_2 = 5 - 4i$. Man berechne die kartesische Darstellung von

a) $z_1 + z_2\,,\quad |z_1 + z_2|\,,\quad 4z_1 - 7iz_2\,,\quad 4\bar{z}_1 - 7i\bar{z}_2\,,$

b) $z_1 \cdot z_2\,,\quad \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2\,,\quad z_1^3 \cdot z_2^2\,,\quad \mathrm{Re}(z_1^3) \cdot \mathrm{Im}(z_2^2)\,,$

c) $\dfrac{z_1}{z_2}\,,\quad \dfrac{\mathrm{Im}(z_1)}{\mathrm{Re}(z_2)}\,.$

Lösung:

a) $z_1 + z_2 = 3 + 2i + 5 - 4i = 8 - 2i$

$$|z_1 + z_2| = |8 - 2i| = \sqrt{8^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{17}$$

$$4z_1 - 7iz_2 = 4(3 + 2i) - 7i(5 - 4i) = 12 + 8i - 35i - 28 = -16 - 27i$$

$$4\bar{z}_1 - 7i\bar{z}_2 = 4(3 - 2i) - 7i(5 + 4i) = 12 - 8i - 35i + 28 = 40 - 43i$$

b) $z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i)(5 - 4i) = 15 - 12i + 10i + 8 = 23 - 2i$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2} = 23 + 2i$$

$$\begin{aligned} z_1^3 \cdot z_2^2 &= (3 + 2i)^3(5 - 4i)^2 = (-9 + 46i)(9 - 40i) \\ &= -81 + 360i + 414i + 1840 = 1759 + 774i\,, \end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}(z_1^3) \cdot \mathrm{Im}(z_2^2) = -9 \cdot (-40) = 360\,,$$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3 + 2i}{5 - 4i} = \dfrac{(3 + 2i)(5 + 4i)}{(5 - 4i)(5 + 4i)} = \dfrac{15 + 12i + 10i - 8}{25 + 16} = \dfrac{7}{41} + \dfrac{22}{41}i$

$$\frac{\mathrm{Im}(z_1)}{\mathrm{Re}(z_2)} = \frac{2}{5}$$

Aufgabe 2:

Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -1,\ z_4 = -i.$$

a) Man gebe $z_1 + z_2, z_2 + z_3, z_1 + z_4$ in Polarkoordinaten an.

b) Man berechne in kartesischen und Polarkoordinaten

$$(z_1 + z_2)^7\,, \quad \frac{z_2 + z_3}{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}\,, \quad \frac{z_1 + z_4}{z_2}\,.$$

Lösung:

a) $z_1 + z_2 = 1 + i:$

$r = |1 + i| = \sqrt{2}\,,\ \varphi = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4} \ \Rightarrow\ z_1 + z_2 = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$

$z_2 + z_3 = -1 + i:$

$r = |-1 + i| = \sqrt{2}\,,$

$\varphi = \pi + \arctan(-1) = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow\ z_2 + z_3 = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$

$z_1 + z_4 = 1 - i:$

$r = |1 - i| = \sqrt{2}\,,\ \varphi = 2\pi + \arctan(-1) = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$

$\Rightarrow\ z_1 + z_4 = \sqrt{2}e^{7\pi i/4}$

b) $(z_1 + z_2)^7 = \left(\sqrt{2}e^{\pi i/4}\right)^7 = 8\sqrt{2}e^{7\pi i/4} = 8(1 - i) = 8 - 8i$

$$\frac{z_2 + z_3}{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} = \frac{\sqrt{2}e^{3\pi i/4}}{\sqrt{2}e^{-\pi i/4}} = e^{3\pi i/4 + \pi i/4} = e^{\pi i} = -1\,.$$

$\dfrac{z_1 + z_4}{z_2} = \dfrac{1 - i}{i} = -1 - i$

$r = |-1 - i| = \sqrt{2}\,,$

$\varphi = \pi + \arctan(1) = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4} \quad \Rightarrow\ \dfrac{z_1 + z_4}{z_2} = \sqrt{2}e^{5\pi i/4}$

Aufgabe 3:

Man berechne alle Lösungen von

$$z^6 = 1$$

in Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten.

Lösung:

Es gibt genau 6 verschiedene Einheitswurzeln. Sie werden berechnet durch

$$z_k = e^{i2\pi k/6}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\,.$$

$$z_0 = e^{i2\pi \cdot 0/6} = 1\,,$$

$$z_1 = e^{i2\pi/6} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$z_2 = e^{i4\pi/6} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$z_3 = e^{i6\pi/6} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1\,,$$

$$z_4 = e^{i8\pi/6} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$z_5 = e^{i10\pi/6} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Bearbeitungstermin: 3.4.- 7.4.