Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 7

Tutoren gesucht:

Für die Durchführung und Korrektur von Übungen

zu Mathematik III im Wintersemester 2023/24

suchen wir noch studentische Tutoren.

Bewerbungen bitte per email (bis Vorlesungsende) an

Kai Rothe (rothe@math.uni-hamburg.de)

mit Namen, Matrikelnummer, Studiengang
und bisherigen Klausurergebnissen in Mathematik.

Laurent-Reihen

Sei f im Kreisring

$$K_{r,R}(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R \}$$

um den **Entwicklungspunkt** $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

a) f ist auf $K_{r,R}(z_0)$ eindeutig in eine **Laurent-Reihe** entwickelbar, d.h.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k := \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k}_{\text{Nebenteil}} .$$

b) Die Koeffizienten a_k sind eindeutig bestimmt und berechnen sich für $k \in \mathbb{Z}$ mit $r < \rho < R$ durch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz .$$

Der Kreis $|z-z_0| = \rho$ wird dabei einmal positiv durchlaufen. Er kann ersetzt werden durch jede geschlossen C^1-Kurve im Kreisring, die z_0 einmal positiv umläuft.

c) **Hauptteil** und **Nebenteil** konvergieren in jedem abgeschlossenen Teilring $K_{\tilde{r},\tilde{R}}(z_0)$ mit

$$r < \tilde{r} \leq |z - z_0| \leq \tilde{R} < R$$

absolut und gleichmäßig.

d) Ist f im Kreis $K_R(z_0)$ um z_0 holomorph, dann verschwinden die Koeffizienten des Hauptteils, d.h. es gilt

$$0 = a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = \cdots$$

und die **Laurent-Reihe** stimmt mit der **Taylor-Reihe** überein.

e) Die **Konvergenzkarte** beispielsweise einer rationalen Funktion

$$f(z) = p(z)/q(z)$$

mit teilerfremden Polynomen p und q und Nennernullstellen w_k mit $k \leq n$ zum Entwicklungspunkt z_0 setzt sich damit aus ineinander geschachtelten Kreisringen

$$(0 <) \quad |z-z_0| < R_1 < |z-z_0| < R_2 < |z-z_0| < \cdots < R_n < |z-z_0|$$

zusammen, mit $R_k = |w_k - z_0|$.

Der innere Ring ist dabei ein echter Kreis $|z - z_0| < R_1$, falls z_0 keine Nennernullstelle ist, sonst ist es die punktierte Kreisscheibe $0 < |z - z_0| < R_1$.

Die Laurent-Reihen je Kreisring werden in der Regel unterschiedlich sein.

Singularitäten

Besitzt f in z_0 eine Definitionslücke, dann handelt es sich um eine **isolierte Singularität**, wenn eine punktierte Kreisscheibe

$$0 < |z - z_0| < r$$

existiert, in der f holomorph ist.

Klassifikation isolierter Singularitäten

Isolierte Singularitäten z_0 werden anhand der Koeffizienten a_k des Hauptteils der Laurent-Reihe zum Entwicklungspunkt z_0 klassifiziert:

a) z_0 heißt **hebbar**, wenn die Laurent-Reihe keinen Hauptteil besitzt, d.h. wenn

$$0 = a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = \cdots$$

gilt, also eine reine Taylor-Reihe vorliegt.

b) z_0 heißt **Pol der Ordnung** $m > 0$, wenn der Hauptteil der Laurent-Reihe nach m Summanden abbricht, d.h.

$$a_{-m} \neq 0 \text{ und } 0 = a_{-(m+1)} = a_{-(m+2)} = a_{-(m+3)} = \cdots$$

gilt.

c) z_0 heißt **wesentliche Singularität**, wenn der Hauptteil der Laurent-Reihe unendlich viele Summanden besitzt, d.h.

$$a_{-k} \neq 0 \ \text{ für unendlich viele } \ k > 0$$

gilt.

Der Koeffizient a_{-1} der Laurent-Reihe von f um z_0

in $0 < |z - z_0| < r$ wird als **Residuum** von f in z_0 bezeichnet

$$\text{Res}\,(f; z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=\rho} f(z)\,dz\,.$$

Residuenberechnung

a) z_0 Pol erster Ordnung

$$\text{Res}\,(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z)\,,$$

Speziell für $f(z) = g(z)/h(z)$ erhält man

$$\text{Res}\,(f; z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

(g, h holomorph und h besitzt in z_0 eine einfache Nullstelle.)

b) z_0 Pol m-ter Ordnung

$$\text{Res}\,(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m \cdot f(z)\right]\,,$$

denn

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m \cdot f(z)\right] \\
= \;& \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \cdots\right] \\
= \;& (m-1)!a_{-1} + m(m-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot a_0(z - z_0) + \cdots
\end{aligned}$$

Aufgabe 22:

Man bestimme die Laurententwicklung der folgenden Funktionen und gebe jeweils den Koeffizienten a_{-1} der Reihe an

a) $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z - z^2/2}{z^2}$ im Punkt $z_0 = 0$,

Einzige Singularität von f ist der Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

Für $|z| > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^z - 1 - z - z^2/2}{z^2} \\
&= \frac{1}{z^2}\left(\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right) \\
&= \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^3}{5!} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} \quad \Rightarrow \quad a_{-1} = 0
\end{aligned}
$$

b) $f(z) = z \sin\left(\dfrac{1}{z+\pi}\right)$ im Punkt $z_0 = -\pi$,

Einzige Singularität von f ist der Entwicklungspunkt $z_0 = -\pi$. Für $|z+\pi| > 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
f(z) &= z \sin\left(\frac{1}{z+\pi}\right) \\
&= (z+\pi-\pi)\left(\frac{1}{z+\pi} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^5} \mp \cdots\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^2} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^4} \mp \cdots\right) \\
&\quad + \left(-\frac{\pi}{z+\pi} + \frac{\pi}{3!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^3} \mp \cdots\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+\pi}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+\pi}\right)^{2n+1}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow\ a_{-1} = -\pi$$

c) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^5}$ im Punkt $z_0 = 0$.

Einzige Singularität von f ist der Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

Für $|z| > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\cos z}{z^5} \\
&= \frac{1}{z^5}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \cdots\right) \\
&= \left(\frac{1}{z^5} - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z} - \frac{z}{6!} \pm \cdots\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-5}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad a_{-1} = \frac{1}{4!}$$

Aufgabe 23:

Für die folgenden Funktionen bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten,

die zugehörigen Residuen und

die ersten drei (nichtverschwindenden) Summanden

der Laurentreihe um $z_0 = 0$, die für große z konvergiert.

a) Die Singularitäten von

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2} = \frac{1}{z^2(z^2+1)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+1}$$

sind gegeben durch die Nennernullstellen, die keine Zählernullstellen sind:

$z_1 = i$ und $z_2 = -i$ sind Pole 1. Ordnung und

$z_3 = 0$ ist Pol 2. Ordnung.

$$\text{Res}\,(f; z_1) = \left.\frac{1}{(z^4+z^2)'}\right|_{z=i} = \left.\frac{1}{4z^3+2z}\right|_{z=i} = \frac{1}{4i^3+2i} = \frac{i}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}\,(f; z_2) &= \left.(z+i) \cdot \frac{1}{z^4+z^2}\right|_{z=-i} \\ &= \left.\frac{1}{z^2(z-i)}\right|_{z=-i} = \frac{1}{(-i)^2(-2i)} = -\frac{i}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Res}\,(f;z_3) &= \frac{1}{1!}\left(z^2\left(\frac{1}{z^4+z^2}\right)\right)'\Bigg|_{z=0} \\
&= \left(\frac{1}{z^2+1}\right)'\Bigg|_{z=0} = -\frac{2z}{(z^2+1)^2}\Bigg|_{z=0} = 0
\end{aligned}$$

Die Laurent-Entwicklung im Außengebiet $|z| > 1$ ergibt sich durch:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^4+z^2} = \frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{1+1/z^2} \\
&= \frac{1}{z^4}\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}\cdots\right) = \frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^8}\cdots
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}_{=:a_n}\frac{1}{z^{2n+1}} \\
&= \frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}+\cdots
\end{aligned}$$

Die einzige Singularität $z_0 = 0$ ist wesentlich mit $\text{Res}\,(f;z_0) = a_{-1} = 1$.

c)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z - \sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \frac{z}{3!} - \frac{z^3}{5!} + \frac{z^5}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

Die einzige Singularität $z_0 = 0$ ist hebbar mit

$\text{Res}\,(f; z_0) = a_{-1} = 0.$

d) Die Singularitäten von

$$f(z) = \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} 0 &= \sinh z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x+iy} - e^{-x-iy}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^x(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y)\right) \\ &= \cos y \sinh x + i \sin y \cosh x \; . \end{aligned}$$

Die Lösungen sind gegeben durch

$y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ und $x = 0$.

Die Nennernullstellen $z_k = ik\pi$ sind einfach und auch keine Zählernullstellen, denn

$$(\sinh z)'|_{z=ik\pi} = \cosh ik\pi = \cos k\pi \neq 0 \; .$$

Also sind z_k Pole 1. Ordnung und man erhält

$$\text{Res}\,(f; z_k) = \left(\frac{\cosh z}{(\sinh z)'}\right)\Bigg|_{z=z_k} = \left(\frac{\cosh z}{\cosh z}\right)\Bigg|_{z=z_k} = 1 \; .$$

Es gibt kein Außengebiet ohne Singularitäten.

Komplexe Partialbruchzerlegung

Gegeben sei die rationale Funktion $\quad r(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$

mit Polynomen p und q und es gelte

a) Grad $p <$ Grad q und

b) r besitze die verschiedenen Polstellen $z_1, \cdots, z_m$.

Dies sind die Nennernullstellen von q, die nach 'kürzen' mit denen von p übrig geblieben sind.

p und q können damit als teilerfremd vorausgesetzt werden.

Betrachtet wird also die in den isolierten hebbaren Singularitäten stetig ergänzte Funktion.

Dann besitzt r die **komplexe Partialbruchzerlegung**

$$r(z) = h(z; z_1) + \cdots + h(z; z_m)\,.$$

Dabei ist $h(z; z_k)$ der Hauptteil der Laurent-Reihe von r zum Entwicklungspunkt z_k und n_k die Ordnung des Pols z_k:

$$h(z; z_k) = \sum_{j=1}^{n_k} a_{-j,k}(z-z_k)^{-j} = \frac{a_{-1,k}}{z-z_k} + \frac{a_{-2,k}}{(z-z_k)^2} + \cdots + \frac{a_{-n_k,k}}{(z-z_k)^{n_k}}.$$

Zur Berechnung der Koeffizienten $a_{-j,k} \in \mathbb{C}$

können die Koeffizienten der Taylor-Reihe der um z_k

holomorphen Funktion $g(z) := (z - z_k)^{n_k} r(z)$

zum Entwicklungspunkt z_k verwendet werden:

$$r(z) = \frac{1}{(z - z_k)^{n_k}} \left(g(z_k) + \frac{g'(z_k)}{1!}(z - z_k) + \frac{g''(z_k)}{2!}(z - z_k)^2 + \cdots \right) .$$

Speziell für einen Pol 1-ter Ordnung in z_k erhält man:

$$h(z; z_k) = \frac{a_{-1,k}}{z - z_k} = \frac{\text{Res } (r; z_k)}{z - z_k} = \frac{g(z_k)}{z - z_k} \; .$$

Residuensatz

Die Funktion f sei im Gebiet G bis auf isolierte Singularitäten z_k holomorph.

Für eine geschlossene Kurve c in G,

die endlich viele verschiedene $z_1, \ldots, z_m$

einmal im mathematisch positiven Sinn umläuft

und auf der selbst keine Singularitäten liegen,

gilt der **Residuensatz**

$$\oint\limits_c f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}\,(f; z_j)\,.$$

Bemerkung:

Umläuft c eine Singularität z_j mehrfach,

so wird der zugehörige Summand der obigen Summe $\operatorname{Res}\,(f; z_j)$

noch mit der **Umlaufzahl** $\operatorname{Uml}\,(c; z_j)$ multipliziert,

also der Differenz der Anzahl positiver und negativer Umläufe.

Aufgabe 24:

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{25}{z^4 - z^2 - 2z + 2} \,.$$

a) Man bestimme mit Hilfe von Laurent-Reihenentwicklungen die Partialbruchzerlegung von f.

Aus der Faktorisierung

$$z^4 - z^2 - 2z + 2 = (z + 1 - i)(z + 1 + i)(z - 1)^2$$

ergeben sich die Nennernullstellen,
die keine Zählernullstellen sind

$$z_0 = -1 + i \,, \quad z_1 = -1 - i \,, \quad z_2 = 1 \,.$$

Damit sind z_0 und z_1 Pole 1. Ordnung
und z_2 ist Pol 2. Ordnung.

Der Hauptteil der Laurententwicklung in z_k, $k = 0, 1$ besitzt damit die Form

$$h(z, z_k) = \frac{a_{-1,k}}{z - z_k}\,, \quad \text{wobei} \quad a_{-1,k} = \operatorname{Res}(f(z); z_k)$$

gilt.

Für $z_0 = -1 + i$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f(z); -1+i) &= \left.\frac{25}{(z+1+i)(z-1)^2}\right|_{z=-1+i} \\
&= \frac{25}{(-1+i+1+i)(-1+i-1)^2} \\
&= \frac{25}{2i(3-4i)} = \frac{25(3+4i)}{2i \cdot 25} = \frac{4-3i}{2}
\end{aligned}$$

Zum gleichen Ergebnis führt die Taylor-Reihenentwicklung des holomorphen Anteils von f um $z_0 = -1 + i$:

$$f(z) = \frac{1}{z+1-i} \cdot \underbrace{\frac{25}{(z+1+i)(z-1)^2}}_{= g_1(z),\,(\text{holom.})}$$

$$= \frac{1}{z+1-i}\left(g_1(-1+i) + g_1'(-1+i)(z+1-i) + \cdots\right)$$

mit $g_1(-1+i) = \operatorname{Res}(f(z); -1+i) = \dfrac{4-3i}{2}$.

Insgesamt erhält man also

$$f(z) = \underbrace{\frac{4-3i}{2(z+1-i)}}_{= h(z,-1+i)} + \underbrace{g_1'(-1+i) + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Für $z_1 = -1-i$ ergibt sich entsprechend

$$f(z) = \frac{1}{z+1+i} \cdot \underbrace{\frac{25}{(z+1-i)(z-1)^2}}_{= g_2(z), \text{(holom.)}}$$

$$= \frac{1}{z+1+i}(g_2(-1-i) + g_2'(-1-i)(z+1+i) + \cdots)$$

mit $g_2(-1-i) = \text{Res}(f(z); -1-i) = \dfrac{4+3i}{2}$.

Insgesamt erhält man also

$$f(z) = \underbrace{\frac{4+3i}{2(z+1+i)}}_{= h(z,-1-i)} + \underbrace{g_2'(-1-i) + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Für den Pol 2. Ordnung $z_2 = 1$

erhält man den Hauptteil der Laurent-Reihe um z_2 über die Taylor-Entwicklung des holomorphen Anteils g_3 von f:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{25}{(z+1-i)(z+1+i)} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \underbrace{\frac{25}{z^2+2z+2}}_{= g_3(z)} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} \left(g_3(1) + g_3'(1)(z-1) + \frac{1}{2} g_3''(1)(z-1)^2 + \cdots \right) \end{aligned}$$

Nach kurzer Rechnung erhält man

$$g_3(1) = 5\,, \quad g_3'(1) = -4 \;=\; \mathrm{Res}(f(z); 1)$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \underbrace{\frac{5}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1}}_{= h(z,1)} + \underbrace{g_3''(1)/2 + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet deshalb:
$f(z) = h(z,-1+i) + h(z,-1-i) + h(z,1)$

$$= \frac{4-3i}{2(z+1-i)} + \frac{4+3i}{2(z+1+i)} + \frac{5}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1}\,.$$

Als reelle Partialbruchzerlegung ergibt sich:

$$f(z) = \frac{4z+7}{z^2+2z+2} + \frac{5}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1}\,.$$

b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_c f(z)\,dz$$

für den Kreis $\quad c: \ |z+2| = 2.$

Von den Singularitäten von f

$$z_0 = -1 + i\,, \quad z_1 = -1 - i\,, \quad z_2 = 1\,.$$

liegen nur z_0 und z_1 innerhalb von c.

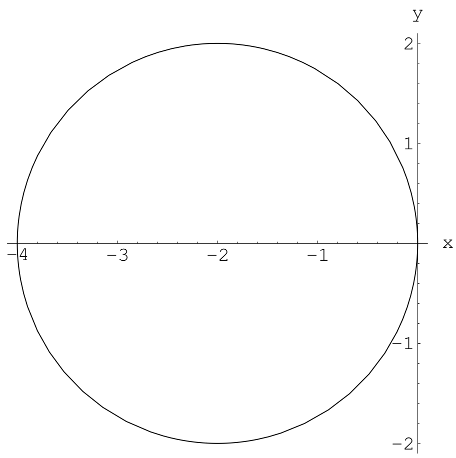

Bild 24: Kreis $c: \ |z+2| = 2$

Damit ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}\,(f; -1+i) + \mathrm{Res}\,(f; -1-i))$$

$$= 2\pi i \left(\frac{4-3i}{2} + \frac{4+3i}{2} \right) = 8\pi i\,.$$

Berechnung reeller Integral über den Residuensatz

a) Es sei f im Gebiet G, das die obere Halbebene

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z \geq 0\}$$

umfasst, bis auf endlich viele isolierte und nicht reelle Singularitäten z_k holomorph
und es gelte $\lim\limits_{|z| \to \infty} z \cdot f(z) = 0$ gleichmäßig in H,
dann kann das folgende reelle uneigentliche Integral berechnet durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k > 0} \mathrm{Res}\, (f; z_k)\ .$$

Insbesondere fallen rationale Funktionen $r(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ in diese Klasse,
wenn für die Polynome Grad $p + 2 \leq$ Grad q gilt.

b) Es sei f im Gebiet G, das die obere Halbebene

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z \geq 0\}$$

umfasst, holomorph bis auf endlich viele isolierte und nicht reelle Singularitäten z_k in der oberen Halbebene
und es gelte $\lim\limits_{|z| \to \infty, y \geq 0} f(z) = 0$, dann gilt

$$CHW \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k > 0} \mathrm{Res}\, \left(f(z) e^{iz}; z_k\right)\ .$$

c) Für die Polynome p und q der rationalen Funktion

$r(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ gelte Grad $p <$ Grad q.

Außerdem habe r keine Polstellen z_k in $0 \le x < \infty$, dann kann das reelle Integral mit $0 < \alpha < 1$ berechnet durch

$$\int_0^\infty \frac{r(x)}{x^\alpha}\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi\alpha i}} \sum_{z_k \neq 0} \mathrm{Res}\,\left(\frac{r(z)}{z^\alpha}; z_k\right) .$$

Man wähle in der Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ für die Auswertung von z^α den Zweig $0 < \varphi < 2\pi$.

d) Ein Integral vom Typ $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$ mit einer rationalen Funktion R lässt sich als (geschlossenes) Kurvenintegral über den Einheitskreis c deuten:

mit der Parametrisierung: $\quad c(\varphi) = e^{i\varphi}\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

Auf dem Einheitskreis, also für $z = c(\varphi)$, gilt:

$$c'(\varphi) = iz, \quad \bar{z} = \frac{1}{z}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Besitzt R keine Polstellen auf dem Einheitskreis, dann gilt nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi &= \int_c \underbrace{R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}}_{=r(z)}\,dz \\ &= 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \mathrm{Res}\,\left(r; z_k\right)\,,\end{aligned}$$

dabei sind z_k die Polstellen der rationalen Funktion $r(z)$.

Aufgabe 25:

Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-4x+6}\,dx,$

Die Singularitäten der Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z^2-4z+6}$

liegen bei $z_1 = 2+i\sqrt{2}$ und $z_2 = 2-i\sqrt{2}$,

sind Pole 1. Ordnung, und man erhält:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-4x+6}\,dx &= 2\pi i\ \mathrm{Res}(f;z_1)\\ &= 2\pi i\,\frac{1}{z-2+i\sqrt{2}}\bigg|_{z=z_1}\\ &= 2\pi i\frac{1}{2i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+324}\,dx$

Beachtet man, dass $g(x) = \dfrac{\sin x}{x^4+324}$ eine ungerade Funktion ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+324}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+324}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^4+324}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{ix}}{x^4+324}}_{=f(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\ z_k>0} \mathrm{Res}\,(f(z);z_k).\end{aligned}$$

Alternativ hätte man auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+324}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^4+324}\,dx\right) ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^4+324}\,dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^4+324}\,dx\right)$$

verwenden können.

Die Singularitäten der Funktion $f(z)$ ergeben sich aus

$$z^4 + 324 = 0$$

und lauten daher

$$z_0 = 3+3i\,, \quad z_1 = -3+3i\,, \quad z_2 = -3-3i\,, \quad z_3 = 3-3i\,.$$

Es sind Pole 1. Ordnung, wovon nur z_0 und z_1 in der oberen Halbebene liegen mit den Residuen

$$\begin{aligned}
\text{Res }(f;z_0) &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \frac{e^{iz_0}}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} \\
&= \frac{e^{i(3+3i)}}{6(6+6i)6i} = -\frac{e^{-3+3i}}{216(1-i)} = -\frac{e^{-3}}{432}\cdot e^{3i}(1+i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Res }(f;z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \frac{e^{iz_1}}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)} \\
&= \frac{e^{i(-3+3i)}}{-6\cdot 6i(-6+6i)} = \frac{e^{-3-3i}}{216(1+i)} = \frac{e^{-3}}{432}\cdot e^{-3i}(1-i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^4+324}\,dx &= 2\pi i\,(\text{ Res }(f;z_0)+\text{ Res }(f;z_1)) \\
&= 2\pi i\left(-\frac{e^{-3}}{432}\cdot e^{3i}(1+i)+\frac{e^{-3}}{432}\cdot e^{-3i}(1-i)\right) \\
&= \frac{e^{-3}\pi i}{216}\left(-(e^{3i}-e^{-3i})-i(e^{3i}+e^{-3i})\right) \\
&= \frac{e^{-3}\pi i}{216}\left(-2i(\sin 3+\cos 3)\right) \\
&= \frac{e^{-3}\pi}{108}\left(\sin 3+\cos 3\right)\ .
\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+3x-4)\sqrt{x+2}}\,dx$,

Die hebbare Singularität bei $x = 1$ wird gekürzt und dann wird durch $y = x + 2$ substituiert:

$$\int_{-2}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+3x-4)\sqrt{x+2}}dx = \int_{-2}^{\infty} \frac{1}{(x+4)\sqrt{x+2}}dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(y+2)\sqrt{y}}dy.$$

Nun besitzt der Integrand die Standardform

$$\frac{r(y)}{y^{\alpha}} = \frac{1}{(y+2)\sqrt{y}}$$

mit $r(y) = \dfrac{1}{y+2}$ und $\alpha = 1/2$.

$r(z)$ besitzt nur die Singularität $z_1 = -2$ und man erhält:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(y+2)\sqrt{y}}\,dx &= \frac{2\pi i}{1-e^{-\pi i}} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+2)\sqrt{z}}; z_1\right) \\ &= \frac{2\pi i}{1-e^{-\pi i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4+\cos\varphi}\, d\varphi\,.$

Mit $z = e^{i\varphi}$ substituiere man

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \text{ bzw. } \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

Die Substitution erfordert noch die Berechnung von:

$$\frac{dz}{d\varphi} = ie^{i\varphi} = iz \;\Rightarrow\; d\varphi = \frac{dz}{iz}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4+\cos\varphi}\, d\varphi &= \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}{4+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} \\ &= -\int_{|z|=1} \underbrace{\frac{z^2-1}{z(z^2+8z+1)}}_{=f(z)}\, dz\end{aligned}$$

Die Singularitäten von f ergeben sich aus

$$0 = z(z^2+8z+1).$$

Man erhält

$$z_0 = 0\,, \quad z_1 = -4+\sqrt{15}\,, \quad z_2 = -4-\sqrt{15}\,.$$

Nur von den im Einheitskreis liegenden z_0 und z_1 werden die Residuen benötigt.

$$\text{Res}\,(f; z_0) \;=\; \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z) \;=\; \frac{z_0^2 - 1}{z_0^2 + 8z_0 + 1} = -1$$

$$\text{Res}\,(f; z_1) \;=\; \lim_{z\to z_1} (z - z_1) f(z) \;=\; \frac{z_1^2 - 1}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)}$$

$$= \;\frac{16 - 8\sqrt{15} + 15 - 1}{(-4 + \sqrt{15})2\sqrt{15}} \;=\; \frac{15 - 4\sqrt{15}}{\sqrt{15}(-4 + \sqrt{15})} = 1$$

Aus dem Residuensatz erhält man damit

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4 + \cos\varphi}\, d\varphi \;=\; -2\pi i\,(\,\text{Res}\,(f; z_0) + \;\text{Res}\,(f; z_1))$$

$$= \;-2\pi i\,(-1 + 1) \;=\; 0\,.$$

Das Ergebnis überrascht nicht, da

$$\frac{\sin\varphi}{4 + \cos\varphi}$$

eine 2π-periodische ungerade Funktion ist.