Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. K. Rothe

SoSe 2023

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 6

Integration komplexwertiger Funktionen mit reellem Definitionsbereich

Gegeben sei $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Mit der Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil

$$f(t) = u(t) + iv(t)$$

wird das Integral über f definiert durch

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt := \int\limits_a^b u(t)\,dt + i\int\limits_a^b v(t)\,dt\,.$$

Kurvenintegrale in der komplexen Ebene

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und

eine Kurve c im Definitionsbereich D von f, mit stetig differenzierbarer Parameterdarstellung

$$c : [a,b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

Die Kurve c besitze die Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$c(t) = x(t) + iy(t)$$

und den komplexwertig dargestellten Tangentialvektor

$$\dot{c}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t).$$

Dann wird das komplexe **Kurvenintegral** von f längs c definiert durch:

$$\int_c f(z)\,dz := \int_a^b f(c(t))\dot{c}(t)\,dt\,.$$

Ist die Kurve geschlossen, gilt also $c(a) = c(b)$,

so verwendet man anstelle von $\int$ das Symbol $\oint$.

Die Berechnung kann mit den obigen Bezeichnungen auf reelle Integrale zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(c(t))\dot{c}(t)\,dt \;&=\; \int_a^b u(c(t))\dot{x}(t) - v(c(t))\dot{y}(t)\,dt \\ &\quad +i\int_a^b v(c(t))\dot{x}(t) + u(c(t))\dot{y}(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Sollte c nur eine stückweise C^1-Kurve sein, so ergibt sich das Kurvenintegral über c

als Summe von Kurvenintegralen über die C^1-Teilkurven, aus denen sich c zusammensetzt.

Cauchyscher Integralsatz

Für eine holomorphe Funktion

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

im einfach zusammenhängenden Gebiet D

und eine geschlossene stückweise C^1-Kurve c in D gilt

$$\oint\limits_c f(z)\, dz = 0 \, .$$

Unter diesen Voraussetzungen ist das Integral **wegunabhängig**,

d.h. für zwei nicht notwendig geschlossene Kurven c und $\tilde{c}$,

die den gleichen Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2 besitzen gilt:

$$\int\limits_c f(z)\, dz = \int\limits_{\tilde{c}} f(z)\, dz =: \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz \, .$$

F heißt **Stammfunktion** zu f, wenn $F' = f$ gilt.

Unter den Voraussetzungen des Cauchyschen Integralsatzes gilt dann

$$F(z_2) - F(z_1) = \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz \, .$$

Aufgabe 18:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int_c z^3 + 4\,dz$

entlang des geradlinigen Weges von $1 - i$ nach $1 + i$,

direkt:

Kurvenparametrisierung:

$c(t) = 2it + 1 - i\ , \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{c}(t) = 2i$

$$\begin{aligned}
\int_c z^3 + 4\,dz &= \int_0^1 ((c(t))^3 + 4)\dot{c}(t)\,dt \\
&= \int_0^1 ((2it + 1 - i)^3 + 4)2i\,dt \\
&= \int_0^1 (-8it^3 - 12(1-i)t^2 + 12t - 2i - 2 + 4)2i\,dt \\
&= \int_0^1 16t^3 - 24(1+i)t^2 + 24it + 4 + 4i\,dt \\
&= \left(4t^4 - 8(1+i)t^3 + 12it^2 + (4+4i)t\right)\Big|_0^1 \\
&= 4 - 8(1+i) + 12i + (4+4i) = 8i
\end{aligned}$$

Stammfunktion:

$$\int\limits_c z^3 + 4\,dz \;=\; \int\limits_{1-i}^{1+i} z^3 + 4\,dz \;=\; \left(\frac{z^4}{4} + 4z\right)\Bigg|_{1-i}^{1+i}$$

$$= \left(\frac{(1+i)^4}{4} - \frac{(1-i)^4}{4} + 4(1+i-(1-i)\right)$$

$$= \frac{-4}{4} - \frac{-4}{4} + 8i = 8i$$

b) $\displaystyle\int\limits_c ze^z\,dz$ für $c(t) = i\pi t$ mit $-1 \le t \le 0$,

direkt:

$$\int\limits_c ze^z\,dz \;=\; \int\limits_{-1}^{0} \dot{c}(t)c(t)e^{c(t)}\,dt = \int\limits_{-1}^{0} i\pi i\pi t e^{i\pi t}\,dt = -\pi^2 \int\limits_{-1}^{0} te^{i\pi t}\,dt$$

$$= -\pi^2 \left(\frac{te^{i\pi t}}{i\pi}\Bigg|_{-1}^{0} - \frac{1}{i\pi}\int\limits_{-1}^{0} e^{i\pi t}\,dt \right)$$

$$= -\pi^2 \left(\frac{te^{i\pi t}}{i\pi} - \frac{e^{i\pi t}}{(i\pi)^2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}$$

$$= e^{i\pi t}\,(i\pi t - 1)\Big|_{-1}^{0} = -1 - e^{-i\pi}(-i\pi - 1)$$

$$= -1 + (-i\pi - 1) = -2 - i\pi$$

Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
\int\limits_c ze^z\,dz &= \int\limits_{-i\pi}^{0} ze^z\,dz \\
&= e^z(z-1)\big|_{-i\pi}^{0} = -1 - e^{-i\pi}(-i\pi - 1) \\
&= -1 + (-i\pi - 1) = -2 - i\pi
\end{aligned}$$

c) Man berechne $\displaystyle\int_{c_k} \frac{1}{z}\,dz$

(i) für die Kurve $\quad c_1(t) = it$ mit $\pi/4 \le t \le 3\pi/4$

direkt:

$$\int_{c_1} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{i}{it}\,dt = \ln t\big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \ln\frac{3\pi}{4} - \ln\frac{\pi}{4} = \ln 3$$

Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
\int_{c_1} \frac{1}{z}\,dz = \ln z\big|_{\pi i/4}^{3\pi i/4} = \ln\left|\frac{3\pi i}{4}\right| + i\frac{\pi}{2} - \left(\ln\left|\frac{\pi i}{4}\right| + i\frac{\pi}{2}\right) \\
= \ln\frac{3\pi}{4} - \ln\frac{\pi}{4} = \ln 3
\end{aligned}$$

(ii) für die Kurve $c_2(t) = e^{it}$ mit $\pi/4 \le t \le 3\pi/4$

direkt:

$$\int_{c_2} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} i\,dt = it\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{\pi i}{2}$$

Stammfunktion:

$$\int_{c_2} \frac{1}{z}dz = \ln z\Big|_{(1+i)/\sqrt{2}}^{(-1+i)/\sqrt{2}} = \ln\left|\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right| + i\frac{3\pi}{4} - \ln\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| - i\frac{\pi}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

d) $\displaystyle\int_1^i \ln z\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

direkt: $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ mit $0 \le \varphi \le \pi/2$

$$\begin{aligned}
\int_1^i \ln z\,dz &= \int_0^{\pi/2} \ln(e^{i\varphi}) ie^{i\varphi}\,d\varphi = i\int_0^{\pi/2} e^{i\varphi}(\ln|e^{i\varphi}| + i\varphi)\,d\varphi \\
&= -\int_0^{\pi/2} e^{i\varphi}\varphi\,d\varphi = \left(-\frac{\varphi}{i}e^{i\varphi}\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{i}\int_0^{\pi/2} e^{i\varphi}\,d\varphi \\
&= -\frac{\pi}{2} - e^{i\varphi}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} - i + 1
\end{aligned}$$

Stammfunktion: $\ln z$ ist holomorph in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-^0$

$$\begin{aligned}
\int_1^i 1\cdot\ln z\,dz &= z\ln z\Big|_1^i - \int_1^i z\cdot\frac{1}{z}\,dz = \left(z\left(\ln|z| + i\arg z\right) - z\right)\Big|_1^i \\
&= i\left(\ln|i| + i\frac{\pi}{2}\right) - (i-1) = -\frac{\pi}{2} - i + 1
\end{aligned}$$

Cauchysche Integralsätze und Formeln

Für eine holomorphe Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

im einfach zusammenhängenden Gebiet D,

$z_0 \in D$ und eine geschlossene stückweise C^1-Kurve

$c : [a, b] \to D\backslash\{z_0\}$, die z_0 einmal im positiven Sinn umläuft, gilt

Cauchyscher Integralsatz:

$$\oint\limits_c f(z)\, dz = 0 \, ,$$

Cauchysche Integralformel:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_c \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \, ,$$

verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \, .$$

Aufgabe 19:

Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\oint\limits_c \dfrac{1}{z+2}\,dz, \quad c:\ |z+1-i| \;=\; 1,$

Isolierte Singularität bei $z_0 = -2$ wird nicht von $c:\ |z+1-i| \;=\; 1$ umschlossen

$$\oint\limits_{|z+1-i|\,=\,1} \frac{1}{z+2}\,dz = 0$$

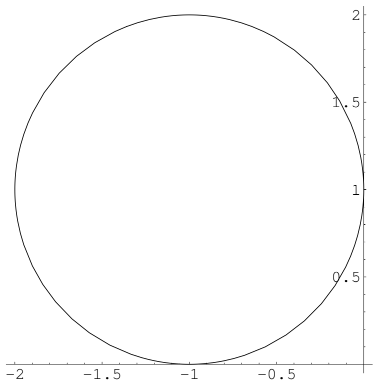

Bild 19 a): Kurve $c:\ |z+1-i| \;=\; 1$

b) $\oint\limits_{c_{1,2}} \frac{z^2-2z+2}{z^3-z^2+2}\,dz, \quad c_1:\ |z| = 0.5, \quad c_2:\ |z| = 1.5,$

$$\frac{z^2-2z+2}{z^3-z^2+2} = \frac{(z-1-i)(z-1+i)}{(z+1)(z-1-i)(z-1+i)} = \frac{1}{z+1}$$

Isolierte aber hebbare Singularität bei $z_1 = 1+i\ ,\ z_2 = 1-i$:
Isolierte und nicht hebbare Singularität bei $z_0 = -1$:

z_0 wird von $c_1 : |z| = 0.5$ nicht umschlossen: $\oint\limits_{c_1} \frac{1}{z+1} dz = 0$

z_0 wird von $c_2 :\ |z|\ =\ 1.5$ umschlossen: $\oint\limits_{c_2} \frac{1}{z+1}\, dz = 2\pi i$

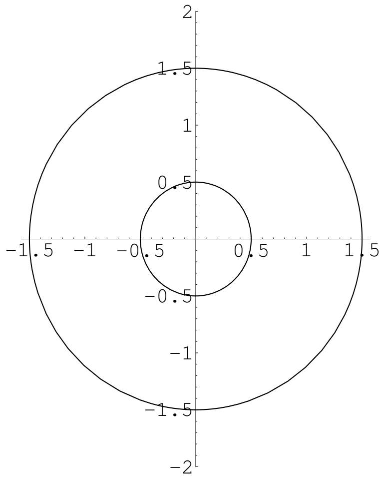

Bild 19 b): Kurven $c_1 :\ |z|\ =\ 0.5$ und $c_2 :\ |z|\ =\ 1.5$

c) $\displaystyle\oint\limits_{c_{1,2}} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz, \quad c_1 : \ |z+2| \ = \ 2, \quad c_2 : \ |z-1.5| \ = \ 2,$

$$\frac{\cos z}{z^2-\pi^2} = \cos z \cdot \frac{1}{z+\pi} \cdot \frac{1}{z-\pi},$$

Singularitäten bei $\quad z_0 = -\pi$ und $z_1 = \pi$

$c_1 : \ |z+2| \ = \ 2$ umschließt nur $z_0 = -\pi$

$$f(z) = \cos z \cdot \frac{1}{z-\pi} \quad \Rightarrow \quad f(-\pi) = \cos(-\pi) \cdot \frac{1}{-\pi-\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\oint\limits_{c_1} \frac{f(z)}{z+\pi}\,dz = \frac{2\pi i f(-\pi)}{0!} = \frac{2\pi i}{2\pi} = i$$

$c_2 : \ |z-1.5| \ = \ 2$ umschließt nur $z_1 = \pi$

$$g(z) = \cos z \cdot \frac{1}{z+\pi} \quad \Rightarrow \quad g(\pi) = \cos(\pi) \cdot \frac{1}{\pi+\pi} = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\oint\limits_{c_2} \frac{g(z)}{z-\pi}\,dz = \frac{2\pi i g(\pi)}{0!} = \frac{2\pi i}{-2\pi} = -i$$

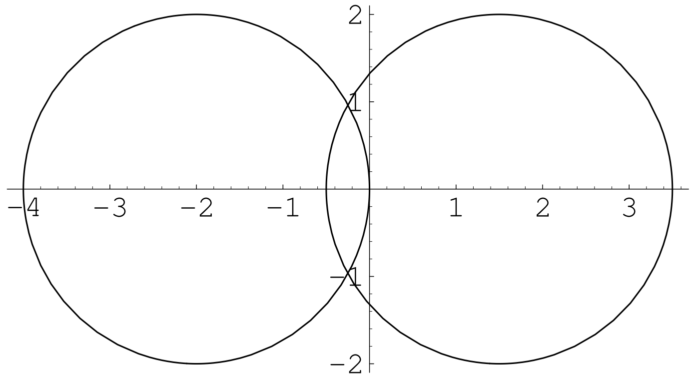

Bild 19 c): Kurven $c_1 : \ |z+2| \ = \ 2$ und $c_2 : \ |z-1.5| \ = \ 2$

d) $\displaystyle\oint\limits_c \frac{z^2+3z-1}{z^2+z-2}\,dz, \quad c:\ |z-i| \ = \ 3,$

Nennerfaktorisierung: $\quad z^2+z-2=(z-1)(z+2)$

$c:|z-i|=3$
umschließt zunächst beide Singularität $z_0=-2$ und $z_1=1$

Partialbruchzerlegung: $\quad \displaystyle\frac{z^2+3z-1}{z^2+z-2}=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2},$

$$\begin{aligned}\oint\limits_c \frac{z^2+3z-1}{z^2+z-2}\,dz \ &= \ \oint\limits_c dz+\oint\limits_c \frac{1}{z-1}\,dz+\oint\limits_c \frac{1}{z+2}\,dz \\ &= \ 0+2\pi i+2\pi i=4\pi i\end{aligned}$$

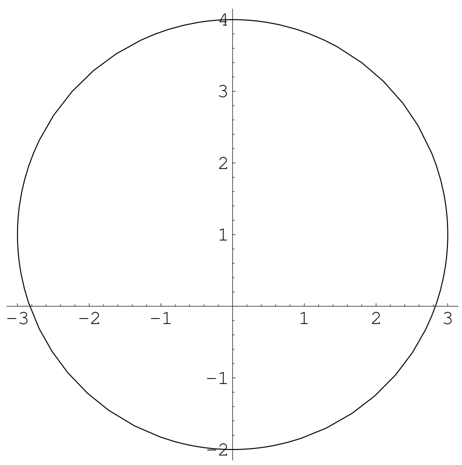

Bild 19 d): Kurve $c:\ |z-i| \ = \ 3$

e) $\displaystyle\oint\limits_c z^2 + \frac{e^z}{z^2}\, dz, \qquad c: \ |z| \ = \ \pi,$

Isolierte Singularität bei $z_0 = 0$ liegt in $c: \ |z| \ = \ \pi$

$$\oint\limits_{|z|=\pi} z^2 + \frac{e^z}{z^2}\, dz \ = \ \oint\limits_{|z|=\pi} z^2\, dz + \oint\limits_{|z|=\pi} \frac{e^z}{z^2}\, dz$$

$$= \ 0 + 2\pi i \frac{(e^z)'|_{z=0}}{1!} = 2\pi i$$

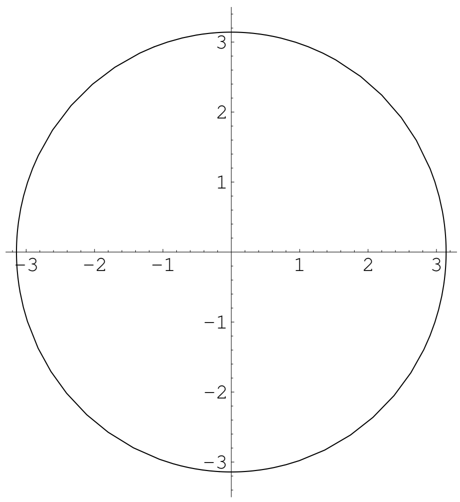

Bild 19 e): Kurve $c: \ |z| \ = \ \pi$

f) $$\oint_c \frac{\ln z}{(z-1-i)^5}\,dz, \qquad c: \ |z-1-2i| \ = \ 2.$$

Einzige Singularität bei $z_0 = 1+i$,

$\ln z$ ist im von der Kurve $c: \ |z-1-2i| \ = \ 2$ umschlossenen Gebiet holomorph.

$$\ln^{(iv)} z = -\frac{6}{z^4}$$

$$\Rightarrow \quad \ln^{(iv)}(1+i) = -\frac{6}{(1+i)^4} = -\frac{6}{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^4} = \frac{3}{2}$$

$$\oint_c \frac{\ln z}{(z-1-i)^5}\,dz = \frac{2\pi i \ln^{(iv)}(1+i)}{4!} = \frac{\pi i}{8}$$

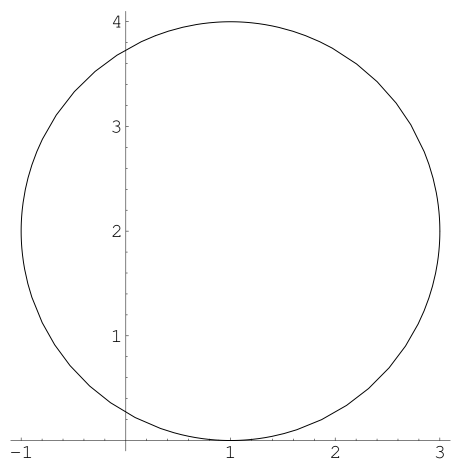

Bild 19 f): Kurve $c: \ |z-1-2i| \ = \ 2$

Taylor-Reihe

Die Funktion f sei auf der offenen Menge D holomorph

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ ,$$

dann ist f in D **beliebig oft differenzierbar** und alle Ableitungen sind wieder holomorph.

Eine auf D holomorphe Funktion f ist um jeden Punkt $z_0 \in D$ in eine **Potenzreihe** entwickelbar

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \ .$$

Die Koeffizienten sind eindeutig bestimmt und berechenbar durch

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \ .$$

Die Potenzreihe stimmt also mit der **Taylor-Reihe** überein.

Im Kreis $K_r(z_0) := \{z \mid |z - z_0| < r\} \subset D$ konvergiert diese **Potenzreihe** gleichmäßig.

$R = \sup r$ wird als **Konvergenzradius** bezeichnet.

Für einen positiv orientierten Kreis $K_r(z_0)$ mit Radius $r < R$ können die Koeffizienten auch berechnet werden durch

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \ .$$

Man erhält f' in $K_r(z_0)$ durch gliedweises Differenzieren der Potenzreihe

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(z - z_0)^{n-1} .$$

f besitzt eine Stammfunktion F in $K_r(z_0)$ und ist gliedweise integrierbar, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} F(z) - F(z_0) &= \int_{z_0}^{z} f(\xi) d\xi \\ &= \int_{z_0}^{z} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\xi - z_0)^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{z_0}^{z} (\xi - z_0)^n d\xi . \end{aligned}$$

Bekannte Potenzreihen:

a) $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n ,$ $\qquad |z| < 1 = R,$

b) $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} ,$ $\qquad R = \infty,$

c) $\sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} ,$ $\qquad R = \infty,$

d) $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} ,$ $\qquad R = \infty$

Aufgabe 20:

a) Man berechne die Taylorreihe von

$$F(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{5-3\xi}$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ und bestimme den Konvergenzradius.

Umformung des Integranden f mit $z_0 = 1$ in die Summenformel für die geometrische Reihe

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{5-3\xi} = \frac{1}{5-3(\xi-1)-3} = \frac{1}{2-3(\xi-1)} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3(\xi-1)}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3(\xi-1)}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}(\xi-1)^n \end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert für

$$|3(\xi-1)/2| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\xi-1| < 2/3 =: R$$

gleichmäßig, darf also gliedweise integriert werden:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_1^z \frac{d\xi}{5-3\xi} = \int_1^z \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}(\xi-1)^n\,d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}\int_1^z(\xi-1)^n\,d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)2^{n+1}}(z-1)^{n+1}\,. \end{aligned}$$

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{5z}{z^2 - 2z + 2}\,, \quad z_0 = -1$ und $z_0 = -1 - i\,,$

$$f(z) = \frac{5z}{z^2 - 2z + 2} = \frac{5z}{(z - (1+i))(z - (1-i))}$$

Singularitäten: $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1 - i$.

Konvergenzradius der Taylorreihe zum Entwicklungspunkt z_0

$$r = \min\{|z_1 - z_0|, |z_2 - z_0|\}\,.$$

Für $z_0 = -1$ bzw. $z_0 = -1 - i$ erhält man:

$$\begin{aligned} r_1 &= \min\{|1 + i - (-1)|, |1 - i - (-1)|\} \\ &= \min\{|2 + i|, |2 - i|\} = \sqrt{5}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= \min\{|1 + i - (-1 - i)|, |1 - i - (-1 - i)|\} \\ &= \min\{2|1 + i|, 2\} = 2. \end{aligned}$$

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{\cosh z}\,, \quad z_0 = \dfrac{7i}{2}\,,$

Die Singularitäten von

$$f(z) = \frac{1}{\cosh z}$$

ergeben sich aus

$0 = \cosh z = \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x$

$\Rightarrow \quad \cos y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pi/2 + k\pi$

$\Rightarrow \quad \sin(\pi/2 + k\pi)\sinh x = (-1)^k \sinh x = 0$
$\quad \Rightarrow \quad x = 0$

Die Singularitäten liegen also bei

$$z_k = (\pi/2 + k\pi)i\,,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Der Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{7i}{2}$ ergibt sich durch:

$$\begin{aligned} r &= \min_k\{|z_k - z_0|\} = \min_k\{|(\pi/2 + k\pi)i - \frac{7i}{2}|\} \\ &= \min_k |\pi + 2k\pi - 7|/2 = |\pi + 2\pi - 7|/2 \approx 1.2124 \end{aligned}$$

(iii) $f(z) = \ln(3z+5)\,, \quad z_0 = 0$ und $z_0 = i$.

Der Hauptwert des Logarithmus der Funktion

$$\ln(3z+5)$$

ist nur in der geschlitzten Ebene definiert, d.h.
reelle Wert x mit $3x+5 \leq 0 \;\Rightarrow\; x \leq -5/3$ sind nicht zugelassen.

Der Konvergenzradius ergibt sich daher als kleinster Abstand zu dieser nicht definierten Halbgeraden.

Für $z_0 = 0$ erhält man $r_1 = |0 - (-5/3)| = 5/3$

für $z_0 = i$ erhält man $r_2 = |i - (-5/3)| = \sqrt{34}/3$.

Laurent-Reihen:

Sei f im Kreisring

$$K_{r,R}(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R \}$$

um den **Entwicklungspunkt** $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

a) f ist auf $K_{r,R}(z_0)$ eindeutig in eine **Laurent-Reihe** entwickelbar, d.h.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k := \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}_{\text{Nebenteil}} .$$

b) Die Koeffizienten a_k sind eindeutig bestimmt und berechnen sich für $k \in \mathbb{Z}$ mit $r < \rho < R$ durch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz .$$

Der Kreis $|z - z_0| = \rho$ wird dabei einmal positiv durchlaufen.

Er kann ersetzt werden durch jede geschlossen C^1-Kurve im Kreisring, die z_0 einmal positiv umläuft.

c) **Hauptteil** und **Nebenteil** konvergieren in jedem abgeschlossenen Teilring

$$K_{\tilde{r},\tilde{R}}(z_0)$$

mit $r < \tilde{r} \le |z - z_0| \le \tilde{R} < R$ absolut und gleichmäßig.

d) Ist f im Kreis $K_R(z_0)$ um z_0 holomorph, dann verschwinden die Koeffizienten des Hauptteils, d.h. es gilt

$$0 = a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = \cdots$$

und die Laurent-Reihe stimmt mit der **Taylor-Reihe** überein.

e) Die **Konvergenzkarte** beispielsweise

einer **rationalen Funktion**

$$f(z) = p(z)/q(z)$$

mit teilerfremden Polynomen p und q und Nennernullstellen w_k mit $k \le n$ zum Entwicklungspunkt z_0 besteht aus ineinander geschachtelten **Kreisringen** mit $R_k = |w_k - z_0|$:

$(0 <)|z-z_0| < R_1 < |z-z_0| < R_2 < |z-z_0| < \cdots < R_n < |z-z_0|$,

Der innere Ring ist dabei ein echter Kreis $|z - z_0| < R_1$, falls z_0 keine Nennernullstelle ist,

sonst ist es die punktierte Kreisscheibe $0 < |z - z_0| < R_1$.

Die Laurent-Reihen je Kreisring werden in der Regel unterschiedlich sein.

Definitionslücke von f in z_0 ist eine **isolierte Singularität**,

wenn eine punktierte Kreisscheibe $0 < |z - z_0| < r$ existiert,

in der f holomorph ist.

Aufgabe 21:

Man gebe alle Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$$

zum Entwicklungspunkt

$$\text{a)} \quad z_0 = 2 \qquad \text{und} \qquad \text{b)} \quad z_0 = -1$$

mit Konvergenzbereich an.

Lösung:

Nennerfaktorisierung: $z^2 - 1 = (z+1)(z-1)$

Singularitäten: $z_1 = -1$ und $z_2 = 1$

Partialbruchzerlegung:

$$f(z) = \frac{2z}{(z+1)(z-1)} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\ .$$

a) Taylor-Reihenentwicklung in der Kreisscheibe $|z-2| < 1$,
erste Laurent-Reihenentwicklung im Kreisring $1 < |z-2| < 3$,
zweite Laurent-Reihenentwicklung im Außenraum $3 < |z-2|$

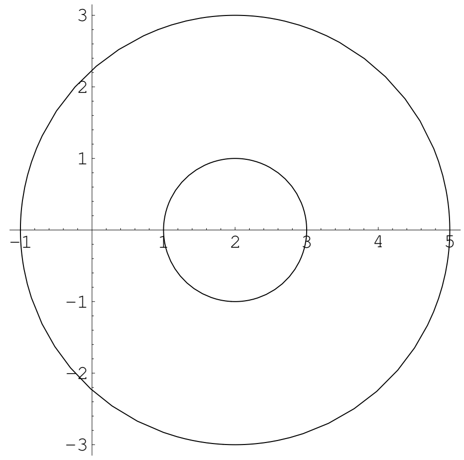

Bild 21 a): Konvergenzbereiche der Laurent-Entwicklungen um $z_0 = 2$

Summenformel der geometrischen Reihe zur Darstellung der Partialbrüche durch Reihenentwicklungen

$|z-2| < 1$:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

$|z-2| > 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+1/(z-2)} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z-2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(z-2)^n\end{aligned}$$

$|z-2| < 3$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{3+z-2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(z-2)/3} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n\end{aligned}$$

$|z-2| > 3$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+3/(z-2)} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z-2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(-1)^n}{(z-2)^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n\,.\end{aligned}$$

Taylor-Reihe in der Kreisscheibe $|z-2|<1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+1\right)(z-2)^n \end{aligned}$$

Laurent-Reihe im Kreisring $1<|z-2|<3$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1} \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n}_{\text{Nebenteil}} - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(z-2)^n}_{\text{Hauptteil}} \end{aligned}$$

Laurent-Reihe im Außenring $3<|z-2|$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n-\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(z-2)^n \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+1\right)(z-2)^n \end{aligned}$$

b) Entwicklungspunkt $z_0 = -1$ ist gleich der Singularität $z_1 = -1$, es gibt keine Taylor-Reihenentwicklung

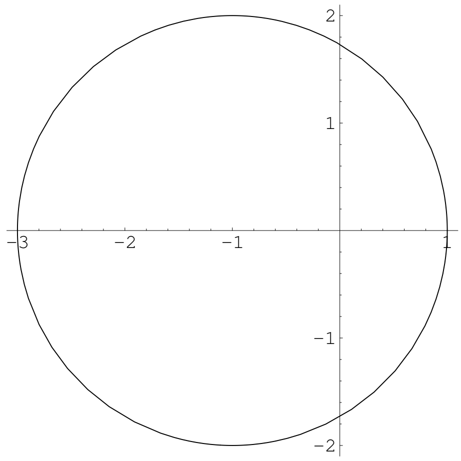

Bild 21 b): Konvergenzbereiche der Laurent-Entwicklungen um $z_0 = -1$

Analog zu a) ergibt sich:

$|z+1| < 2$:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{-2+z+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(z+1)/2}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z+1)^n$$

$|z+1| > 2$:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1-2/(z+1)}$$

$$= \frac{1}{z+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z+1} \right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2^{n+1}} (z+1)^n \, .$$

Laurent-Reihe in der punktierten Kreisscheibe $0 < |z+1| < 2$:

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} = \underbrace{\frac{1}{z+1}}_{\text{Hauptteil}} \underbrace{- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n}_{\text{Nebenteil}} .$$

Laurent-Reihe im Außenring $|z+1| > 2$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+1} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n \\ &= \frac{2}{z+1} + \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n . \end{aligned}$$