Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 6

Komplexe Integration

Komplexwertige Funktionen mit reellem Definitionsbereich

Gegeben sei $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Mit der Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil $f(t) = u(t) + iv(t)$ wird das Integral über f definiert durch

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i \int_a^b v(t)\,dt\,.$$

Kurvenintegrale in der komplexen Ebene

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und eine Kurve c im Definitionsbereich D von f, mit stetig differenzierbarer Parameterdarstellung $c : [a,b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Die Kurve c besitze die Zerlegung in Real- und Imaginärteil $c(t) = x(t) + iy(t)$ und den komplexwertig dargestellten Tangentialvektor $\dot{c}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$.

Dann wird das komplexe **Kurvenintegral** von f längs c definiert durch:

$$\int_c f(z)\,dz := \int_a^b f(c(t))\dot{c}(t)\,dt\,.$$

Ist die Kurve geschlossen, gilt also $c(a) = c(b)$, so verwendet man anstelle von $\displaystyle\int$ das Symbol $\displaystyle\oint$.

Die Berechnung kann mit den obigen Bezeichnungen auf reelle Integrale zurückgeführt werden:

$$\int\limits_a^b f(c(t))\dot{c}(t)\,dt = \int\limits_a^b u(c(t))\dot{x}(t) - v(c(t))\dot{y}(t)\,dt + i\int\limits_a^b v(c(t))\dot{x}(t) + u(c(t))\dot{y}(t)\,dt\,.$$

Sollte c nur eine stückweise C^1-Kurve sein, so ergibt sich das Kurvenintegral über c als Summe von Kurvenintegralen über die C^1-Teilkurven, aus denen sich c zusammensetzt.

Cauchyscher Integralsatz

Für eine holomorphe Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ im einfach zusammenhängenden Gebiet D und eine geschlossene stückweise C^1-Kurve c in D gilt

$$\oint\limits_c f(z)\,dz = 0\,.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist das Integral **wegunabhängig**, d.h. für zwei nicht notwendig geschlossene Kurven c und $\tilde{c}$, die den gleichen Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2 besitzen gilt:

$$\int\limits_c f(z)\,dz = \int\limits_{\tilde{c}} f(z)\,dz =: \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz\,.$$

F heißt **Stammfunktion** zu f, wenn $F' = f$ gilt. Unter den Voraussetzungen des Cauchyschen Integralsatzes gilt dann

$$F(z_2) - F(z_1) = \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz\,.$$

Aufgabe 18:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int\limits_c z^3 + 4\,dz$ entlang des geradlinigen Weges von $1-i$ nach $1+i$,

b) $\displaystyle\int\limits_c ze^z\,dz$ für $c(t) = i\pi t$ mit $-1 \le t \le 0$,

c) $\displaystyle\int_{c_k} \frac{1}{z}\,dz$ für die Kurven $c_1(t) = it$ und $c_2(t) = e^{it}$ mit $\pi/4 \le t \le 3\pi/4$,

d) $\displaystyle\int\limits_1^i \ln z\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

Lösung:

a) direkt:

Kurvenparametrisierung: $c(t) = 2it + 1 - i\,, \quad 0 \le t \le 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{c}(t) = 2i$

$$\begin{aligned}
\int\limits_c z^3 + 4\,dz &= \int\limits_0^1 ((c(t))^3 + 4)\dot{c}(t)\,dt = \int\limits_0^1 ((2it + 1 - i)^3 + 4)2i\,dt \\
&= \int\limits_0^1 (-8it^3 - 12(1-i)t^2 + 12t - 2i - 2 + 4)2i\,dt \\
&= \int\limits_0^1 16t^3 - 24(1+i)t^2 + 24it + 4 + 4i\,dt \\
&= \left(4t^4 - 8(1+i)t^3 + 12it^2 + (4+4i)t\right)\Big|_0^1 \\
&= 4 - 8(1+i) + 12i + (4+4i) = 8i
\end{aligned}$$

Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
\int\limits_c z^3 + 4\,dz &= \int\limits_{1-i}^{1+i} z^3 + 4\,dz = \left(\frac{z^4}{4} + 4z\right)\Bigg|_{1-i}^{1+i} \\
&= \left(\frac{(1+i)^4}{4} - \frac{(1-i)^4}{4} + 4(1 + i - (1-i)\right) = \frac{-4}{4} - \frac{-4}{4} + 8i = 8i
\end{aligned}$$

b) direkt: $c(t) = i\pi t$ mit $-1 \le t \le 0$

$$\begin{aligned}
\int\limits_c ze^z\,dz &= \int\limits_{-1}^{0} \dot{c}(t)c(t)e^{c(t)}\,dt = \int\limits_{-1}^{0} i\pi i\pi t e^{i\pi t}\,dt = -\pi^2 \int\limits_{-1}^{0} te^{i\pi t}\,dt \\
&= -\pi^2 \left(\frac{te^{i\pi t}}{i\pi}\Bigg|_{-1}^{0} - \frac{1}{i\pi}\int\limits_{-1}^{0} e^{i\pi t}\,dt \right) = -\pi^2 \left(\frac{te^{i\pi t}}{i\pi} - \frac{e^{i\pi t}}{(i\pi)^2} \right)\Bigg|_{-1}^{0} \\
&= e^{i\pi t}\,(i\pi t - 1)\big|_{-1}^{0} = -1 - e^{-i\pi}(-i\pi - 1) \\
&= -1 + (-i\pi - 1) = -2 - i\pi
\end{aligned}$$

Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
\int\limits_c ze^z\,dz &= \int\limits_{-i\pi}^{0} ze^z\,dz = e^z(z-1)|_{-i\pi}^{0} = -1 - e^{-i\pi}(-i\pi - 1) \\
&= -1 + (-i\pi - 1) = -2 - i\pi
\end{aligned}$$

c) (i) $c_1(t) = it$ mit $\pi/4 \le t \le 3\pi/4$

direkt:

$$\int_{c_1} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{i}{it}\,dt = \ln t|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \ln\frac{3\pi}{4} - \ln\frac{\pi}{4} = \ln 3$$

Stammfunktion:

$$\int_{c_1} \frac{1}{z}\,dz = \ln z|_{\pi i/4}^{3\pi i/4} = \ln\left|\frac{3\pi i}{4}\right| + i\frac{\pi}{2} - \left(\ln\left|\frac{\pi i}{4}\right| + i\frac{\pi}{2}\right) = \ln\frac{3\pi}{4} - \ln\frac{\pi}{4} = \ln 3$$

(ii) $c_2(t) = e^{it}$ mit $\pi/4 \le t \le 3\pi/4$

direkt:

$$\int_{c_2} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} i\,dt = it|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{\pi i}{2}$$

Stammfunktion:

$$\int_{c_2} \frac{1}{z}\,dz = \ln z|_{(1+i)/\sqrt{2}}^{(-1+i)/\sqrt{2}} = \ln\left|\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right| + i\frac{3\pi}{4} - \ln\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| - i\frac{\pi}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

d) direkt: $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ mit $0 \le \varphi \le \pi/2$

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^i \ln z\,dz &= \int\limits_0^{\pi/2} \ln(e^{i\varphi})ie^{i\varphi}\,d\varphi = i\int\limits_0^{\pi/2} e^{i\varphi}(\ln|e^{i\varphi}| + i\varphi)\,d\varphi = -\int\limits_0^{\pi/2} e^{i\varphi}\varphi\,d\varphi \\
&= \left(-\frac{\varphi}{i}e^{i\varphi}\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{i}\int\limits_0^{\pi/2} e^{i\varphi}\,d\varphi = -\frac{\pi}{2} - e^{i\varphi}\big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} - i + 1
\end{aligned}$$

Stammfunktion: In der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-^0$ ist $\ln z$ holomorph.

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^i 1\cdot\ln z\,dz &= z\ln z|_1^i - \int\limits_1^i z\cdot\frac{1}{z}\,dz = (z\,(\ln|z| + i\arg z) - z)|_1^i \\
&= i\left(\ln|i| + i\frac{\pi}{2}\right) - (i-1) = -\frac{\pi}{2} - i + 1
\end{aligned}$$

Cauchysche Integralsätze und Formeln

Für eine holomorphe Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ im einfach zusammenhängenden Gebiet D, $z_0 \in D$ und eine geschlossene stückweise C^1-Kurve $c : [a, b] \to D \backslash \{z_0\}$, die z_0 einmal im positiven Sinn umläuft, gilt

Cauchyscher Integralsatz: $$\oint_c f(z)\,dz = 0\,,$$

Cauchysche Integralformel: $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz\,,$$

verallg. Cauchysche Integralformel: $$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz\,.$$

Aufgabe 19:

Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint_c \frac{1}{z+2}\,dz, \quad c: \; |z + 1 - i| \; = \; 1,$

b) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{z^2 - 2z + 2}{z^3 - z^2 + 2}\,dz, \quad c_1: \; |z| \; = \; 0.5, \quad c_2: \; |z| \; = \; 1.5,$

c) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2}\,dz, \quad c_1: \; |z + 2| \; = \; 2, \quad c_2: \; |z - 1.5| \; = \; 2,$

d) $\displaystyle\oint_c \frac{z^2 + 3z - 1}{z^2 + z - 2}\,dz, \quad c: \; |z - i| \; = \; 3,$

e) $\displaystyle\oint_c z^2 + \frac{e^z}{z^2}\,dz, \quad c: \; |z| \; = \; \pi,$

f) $\displaystyle\oint_c \frac{\ln z}{(z - 1 - i)^5}\,dz, \quad c: \; |z - 1 - 2i| \; = \; 2.$

Lösung:

a) Isolierte Singularität bei $z_0 = -2$ wird nicht von $c: \, |z+1-i| \, = \, 1$ umschlossen

$$\oint\limits_{|z+1-i|\,=\,1} \frac{1}{z+2}\, dz = 0$$

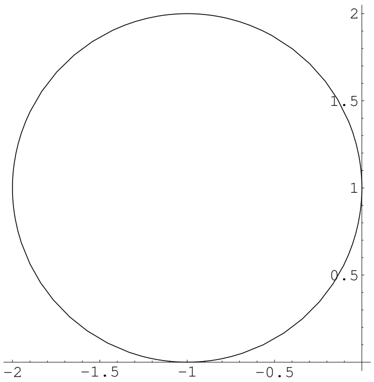

Bild 19 a): Kurve $c: \, |z+1-i| \, = \, 1$

b) $$\frac{z^2-2z+2}{z^3-z^2+2} = \frac{(z-1-i)(z-1+i)}{(z+1)(z-1-i)(z-1+i)} = \frac{1}{z+1}$$

Isolierte aber hebbare Singularität bei $z_1 = 1+i\,,\ z_2 = 1-i$:

Isolierte und nicht hebbare Singularität bei $z_0 = -1$:

z_0 wird von $c_1: \, |z| \, = \, 0.5$ nicht umschlossen: $\displaystyle\oint\limits_{c_1} \frac{1}{z+1}\, dz = 0$

z_0 wird von $c_2: \, |z| \, = \, 1.5$ umschlossen: $\displaystyle\oint\limits_{c_2} \frac{1}{z+1}\, dz = 2\pi i$

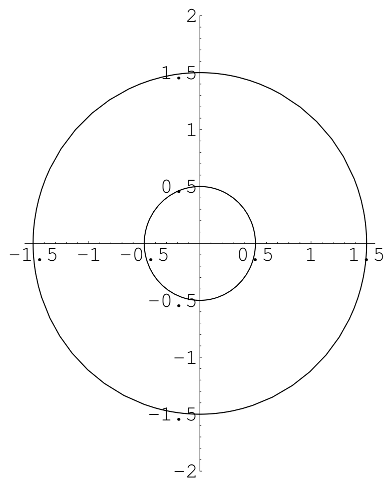

Bild 19 b): Kurven $c_1: \, |z| \, = \, 0.5$ und $c_2: \, |z| \, = \, 1.5$

c) $\dfrac{\cos z}{z^2-\pi^2} = \cos z \cdot \dfrac{1}{z+\pi} \cdot \dfrac{1}{z-\pi}$,

Singularitäten bei $z_0 = -\pi$ und $z_1 = \pi$

$c_1 : \; |z+2| \; = \; 2$ umschließt nur die isolierte Singularität $z_0 = -\pi$

$$f(z) = \cos z \cdot \frac{1}{z-\pi} \quad \Rightarrow \quad f(-\pi) = \cos(-\pi) \cdot \frac{1}{-\pi-\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\oint_{c_1} \frac{f(z)}{z+\pi}\, dz = \frac{2\pi i f(-\pi)}{0!} = \frac{2\pi i}{2\pi} = i$$

$c_2 : \; |z-1.5| \; = \; 2$ umschließt nur die isolierte Singularität $z_1 = \pi$

$$g(z) = \cos z \cdot \frac{1}{z+\pi} \quad \Rightarrow \quad g(\pi) = \cos(\pi) \cdot \frac{1}{\pi+\pi} = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\oint_{c_2} \frac{g(z)}{z-\pi}\, dz = \frac{2\pi i g(\pi)}{0!} = \frac{2\pi i}{-2\pi} = -i$$

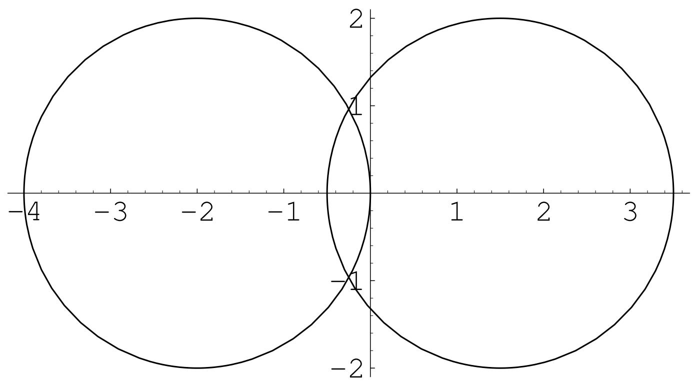

Bild 19 c): Kurven $c_1 : \; |z+2| \; = \; 2$ und $c_2 : \; |z-1.5| \; = \; 2$

d) $c : |z-i| = 3$ umschließt zunächst beide Singularität $z_0 = -2$ und $z_1 = 1$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{z^2+3z-1}{z^2+z-2} = 1 + \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z+2}$,

$$\oint_{c} \frac{z^2+3z-1}{z^2+z-2}\, dz = \oint_{c} dz + \oint_{c} \frac{1}{z-1}\, dz + \oint_{c} \frac{1}{z+2}\, dz = 0 + 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$

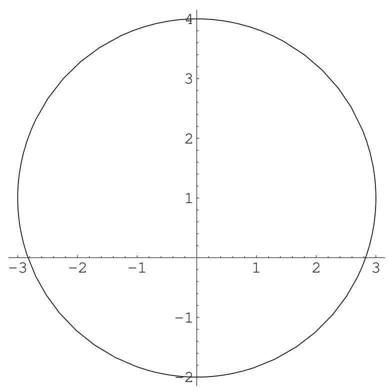

Bild 19 d): Kurve $c : \; |z-i| \; = \; 3$

e) Isolierte Singularität bei $z_0 = 0$ liegt in $c: \; |z| \; = \; \pi$

$$\oint\limits_{|z|=\pi} z^2 + \frac{e^z}{z^2}\,dz = \oint\limits_{|z|=\pi} z^2\,dz + \oint\limits_{|z|=\pi} \frac{e^z}{z^2}\,dz = 0 + 2\pi i \frac{(e^z)'|_{z=0}}{1!} = 2\pi i$$

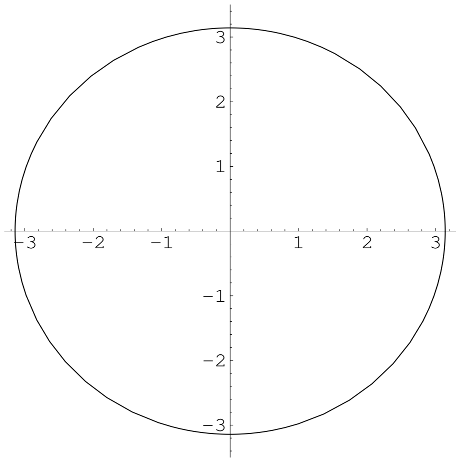

Bild 19 e): Kurve $c: \; |z| \; = \; \pi$

f) Einzige Singularität bei $z_0 = 1 + i$,

$\ln z$ ist im von der Kurve $c: \; |z - 1 - 2i| \; = \; 2$ umschlossenen Gebiet holomorph.

$$\ln^{(iv)} z = -\frac{6}{z^4} \quad \Rightarrow \quad \ln^{(iv)}(1+i) = -\frac{6}{(1+i)^4} = -\frac{6}{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^4} = \frac{3}{2}$$

$$\oint\limits_c \frac{\ln z}{(z-1-i)^5}\,dz = \frac{2\pi i \ln^{(iv)}(1+i)}{4!} = \frac{\pi i}{8}$$

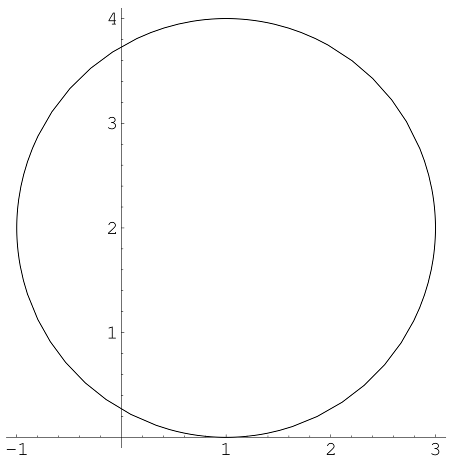

Bild 19 f): Kurve $c: \; |z - 1 - 2i| \; = \; 2$

Taylor-Reihe

Die Funktion f sei auf der offenen Menge D holomorph

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ ,$$

dann ist f in D **beliebig oft differenzierbar** und alle Ableitungen sind wieder holomorph.

Eine auf D holomorphe Funktion f ist um jeden Punkt $z_0 \in D$ in eine **Potenzreihe** entwickelbar

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \ .$$

Die Koeffizienten sind eindeutig bestimmt und berechenbar durch

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \ .$$

Die Potenzreihe stimmt also mit der **Taylor-Reihe** überein.

Im Kreis $K_r(z_0) := \{z \mid |z - z_0| < r\} \subset D$ konvergiert diese **Potenzreihe** gleichmäßig.

$R = \sup r$ wird als **Konvergenzradius** bezeichnet.

Für einen positiv orientierten Kreis $K_r(z_0)$ mit Radius $r < R$ können die Koeffizienten auch berechnet werden durch

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{K_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \ .$$

Man erhält f' in $K_r(z_0)$ durch gliedweises Differenzieren der Potenzreihe

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (z - z_0)^{n-1} \ .$$

f besitzt eine Stammfunktion F in $K_r(z_0)$ und ist gliedweise integrierbar, d.h. es gilt

$$F(z) - F(z_0) = \int_{z_0}^{z} f(\xi) d\xi = \int_{z_0}^{z} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\xi - z_0)^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{z_0}^{z} (\xi - z_0)^n d\xi \ .$$

Bekannte Potenzreihen:

a) $\displaystyle \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ , \quad |z| < 1 = R,$ b) $\displaystyle e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ , \quad R = \infty,$

c) $\displaystyle \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \ , \quad R = \infty,$ d) $\displaystyle \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \ , \quad R = \infty$

Aufgabe 20:

a) Man berechne die Taylorreihe von $F(z) = \displaystyle\int_1^z \frac{d\xi}{5-3\xi}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{5z}{z^2-2z+2}\,, \quad z_0 = -1$ und $z_0 = -1-i\,,$

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{\cosh z}\,, \quad z_0 = \dfrac{7i}{2}\,,$

(iii) $f(z) = \ln(3z+5)\,, \quad z_0 = 0$ und $z_0 = i\,.$

Lösung:

a) Der Integrand f wird unter Berücksichtigung des Entwicklungspunktes $z_0 = 1$ so umgeformt, dass die Summenformel für die geometrische Reihe angewendet werden kann.

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{5-3\xi} = \frac{1}{5-3(\xi-1)-3} = \frac{1}{2-3(\xi-1)} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3(\xi-1)}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3(\xi-1)}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}(\xi-1)^n \end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert für $|3(\xi-1)/2| < 1$ gleichmäßig, darf also in der Kreisscheibe $|\xi-1| < 2/3 =: R$ gliedweise integriert werden:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_1^z \frac{d\xi}{5-3\xi} = \int_1^z \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}(\xi-1)^n\,d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}\int_1^z(\xi-1)^n\,d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)2^{n+1}}(z-1)^{n+1}\,. \end{aligned}$$

b) (i) $f(z) = \dfrac{5z}{z^2-2z+2} = \dfrac{5z}{(z-(1+i))(z-(1-i))}$

Die Singularitäten liegen bei $z_1 = 1+i$ und $z_2 = 1-i$. Damit ergibt sich der Konvergenzradius der Taylorreihe zum Entwicklungspunkt z_0 durch

$$r = \min\{|z_1-z_0|, |z_2-z_0|\}\,.$$

Für $z_0 = -1$ bzw. $z_0 = -1-i$ erhält man:
$r_1 = \min\{|1+i-(-1)|, |1-i-(-1)|\}$
$= \min\{|2+i|, |2-i|\} = \sqrt{5}\,,$
$r_2 = \min\{|1+i-(-1-i)|, |1-i-(-1-i)|\}$
$= \min\{2|1+i|, 2\} = 2.$

(ii) Die Singularitäten von $f(z) = \dfrac{1}{\cosh z}$ ergeben sich aus
$0 = \cosh z = \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x$
$\Rightarrow \quad \cos y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pi/2 + k\pi$
$\Rightarrow \quad \sin(\pi/2 + k\pi) \sinh x = (-1)^k \sinh x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$
Die Singularitäten liegen also bei $z_k = (\pi/2 + k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$.
Der Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{7i}{2}$ ergibt sich durch:

$$\begin{aligned} r &= \min_k\{|z_k - z_0|\} = \min_k\{|(\pi/2 + k\pi)i - \frac{7i}{2}|\} \\ &= \min_k |\pi + 2k\pi - 7|/2 = |\pi + 2\pi - 7|/2 \approx 1.2124 \end{aligned}$$

(iii) Der Hauptwert des Logarithmus der Funktion $\ln(3z + 5)$ ist nur in der geschlitzten Ebene definiert, d.h. reelle Wert x mit $3x + 5 \leq 0 \;\Rightarrow\; x \leq -5/3$ sind nicht zugelassen. Der Konvergenzradius ergibt sich daher als kleinster Abstand zu dieser nicht definierten Halbgeraden.
Für $z_0 = 0$ erhält man $r_1 = |0 - (-5/3)| = 5/3$
und für $z_0 = i$ erhält man $r_2 = |i - (-5/3)| = \sqrt{34}/3$.

Laurent-Reihen:

Sei f im Kreisring

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

um den **Entwicklungspunkt** $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

a) f ist auf $K_{r,R}(z_0)$ eindeutig in eine **Laurent-Reihe** entwickelbar, d.h.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k := \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{\text{Nebenteil}} .$$

b) Die Koeffizienten a_k sind eindeutig bestimmt und berechnen sich für $k \in \mathbb{Z}$ mit $r < \rho < R$ durch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz .$$

Der Kreis $|z-z_0| = \rho$ wird dabei einmal positiv durchlaufen. Er kann ersetzt werden durch jede geschlossen C^1-Kurve im Kreisring, die z_0 einmal positiv umläuft.

c) **Hauptteil** und **Nebenteil** konvergieren in jedem abgeschlossenen Teilring $K_{\tilde{r},\tilde{R}}(z_0)$ mit $r < \tilde{r} \leq |z - z_0| \leq \tilde{R} < R$ absolut und gleichmäßig.

d) Ist f im Kreis $K_R(z_0)$ um z_0 holomorph, dann verschwinden die Koeffizienten des Hauptteils, d.h. es gilt $0 = a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = \cdots$ und die Laurent-Reihe stimmt mit der **Taylor-Reihe** überein.

e) Die **Konvergenzkarte** beispielsweise einer rationalen Funktion $f(z) = p(z)/q(z)$ mit teilerfremden Polynomen p und q und Nennernullstellen w_k mit $k \leq n$ zum Entwicklungspunkt z_0 setzt sich damit aus ineinander geschachtelten Kreisringen

$$(0 <) \quad |z - z_0| < R_1 < |z - z_0| < R_2 < |z - z_0| < \cdots < R_n < |z - z_0|$$

zusammen, mit $R_k = |w_k - z_0|$. Der innere Ring ist dabei ein echter Kreis $|z-z_0| < R_1$, falls z_0 keine Nennernullstelle ist, sonst ist es die punktierte Kreisscheibe $0 < |z-z_0| < R_1$. Die Laurent-Reihen je Kreisring werden in der Regel unterschiedlich sein.

Besitzt f in z_0 eine Definitionslücke, dann handelt es sich um eine **isolierte Singularität**, wenn eine punktierte Kreisscheibe $0 < |z - z_0| < r$ existiert, in der f holomorph ist.

Aufgabe 21:

Man gebe alle Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$$

zum Entwicklungspunkt

$$\text{a)} \quad z_0 = 2 \qquad \text{und} \qquad \text{b)} \quad z_0 = -1$$

mit Konvergenzbereich an.

Lösung:

Die Faktorisierung des Nenners $z^2 - 1 = (z+1)(z-1)$ ergibt die Singularitäten der Funktion bei $z_1 = -1$ und $z_2 = 1$. Eine Partialbruchzerlegung liefert:

$$f(z) = \frac{2z}{(z+1)(z-1)} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} \; .$$

a) Aufgrund der Lage des Entwicklungspunktes bei $z_0 = 2$ und der beiden Singularitäten $z_1 = -1$ und $z_2 = 1$ kann man ablesen, dass eine Taylor-Reihenentwicklung in der Kreisscheibe $|z-2| < 1$ vorliegen wird, eine Laurent-Reihenentwicklung im Kreisring $1 < |z-2| < 3$ und eine davon verschiedene Laurent-Reihenentwicklung im Außenraum $3 < |z-2|$.

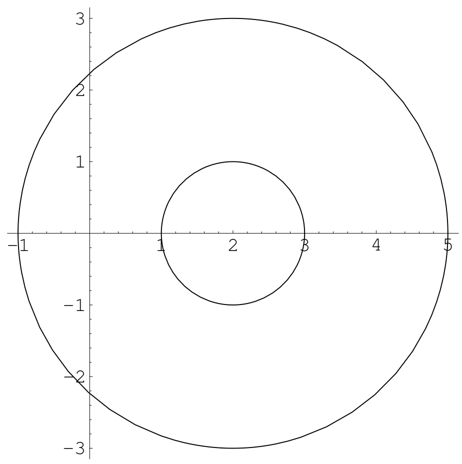

Bild 21 a): Konvergenzbereiche der Laurent-Reihenentwicklungen um $z_0 = 2$

Mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe im entsprechenden Konvergenzbereich können die Partialbrüche durch Reihenentwicklungen dargestellt werden:

$|z-2| < 1$:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

$|z-2| > 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+1/(z-2)} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z-2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(z-2)^n\end{aligned}$$

$|z-2| < 3$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{3+z-2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(z-2)/3} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n\end{aligned}$$

$|z-2| > 3$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+3/(z-2)} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z-2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(-1)^n}{(z-2)^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n\,.\end{aligned}$$

Taylor-Reihe mit Konvergenz in der Kreisscheibe $|z-2| < 1$:

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+1\right)(z-2)^n\,.\end{aligned}$$

Laurent-Reihe mit Konvergenz im Kreisring $1 < |z-2| < 3$:

$$f(z) = \frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n}_{\text{Nebenteil}} - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(z-2)^n}_{\text{Hauptteil}}\,.$$

Laurent-Reihe mit Konvergenz im Außenring $3 < |z-2|$:

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n - \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n(z-2)^n \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+1\right)(z-2)^n\,.\end{aligned}$$

b) Da der Entwicklungspunkt $z_0 = -1$ mit der Singularität $z_1 = -1$ übereinstimmt, gibt es keine Taylor-Reihenentwicklung.

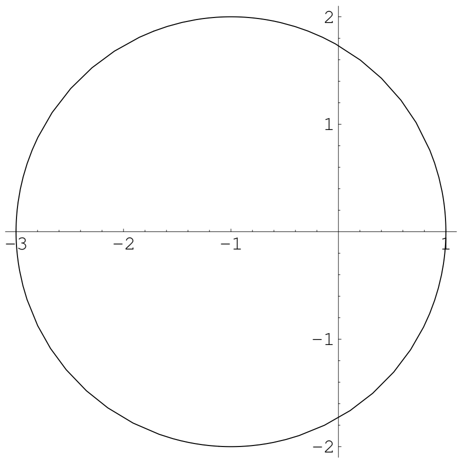

Bild 21 b): Konvergenzbereiche der Laurent-Reihenentwicklungen um $z_0 = -1$

Analog zu a) ergibt sich:

$|z+1| < 2 \quad :$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{-2+z+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(z+1)/2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n$$

$|z+1| > 2 \quad :$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1-2/(z+1)} = \frac{1}{z+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z+1}\right)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n \, . \end{aligned}$$

In der punktierten Kreisscheibe $0 < |z+1| < 2$ konvergente Laurent-Reihe:

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} = \underbrace{\frac{1}{z+1}}_{\text{Hauptteil}} \underbrace{-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n}_{\text{Nebenteil}} \, .$$

Im Außenring $|z+1| > 2$ konvergente Laurent-Reihe:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+1} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n \\ &= \frac{2}{z+1} + \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n \, . \end{aligned}$$