

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 5

Differentialrechnung im Komplexen:

Eine Abbildung $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **holomorph**,

wenn sie in jedem Punkt z_0 des Gebietes D

komplex differenzierbar ist, d.h. es existiert

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

oder entsprechend

$$f(z) = f(z_0) + \underbrace{f'(z_0)(z - z_0)}_{=df} + o(|z - z_0|).$$

Für die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$ und

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit stetig partiell differenzierbaren Funktionen u und v

in einer (offenen) Umgebung von $z_0 = x_0 + iy_0$,

wird das komplexe Differential df in z_0 erklärt durch

$$df := du + idv,$$

$$du = u_x(x_0, y_0)dx + u_y(x_0, y_0)dy$$

$$dv = v_x(x_0, y_0)dx + v_y(x_0, y_0)dy.$$

mit den reellen Differentialen $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$.

Man erhält damit

$$\begin{aligned} df &= u_x(x_0, y_0)dx + u_y(x_0, y_0)dy + i(v_x(x_0, y_0)dx + v_y(x_0, y_0)dy) \\ &= \underbrace{(u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0))}_{=f_x(z_0)}dx + \underbrace{(u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0))}_{=f_y(z_0)}dy . \end{aligned}$$

Die Differentiale dx und dy werden ersetzt

durch Differentiale $dz = z - z_0 = dx + idy$ und $d\bar{z} = dx - idy$

$$\begin{aligned} df &= f_x(z_0)\frac{dz + d\bar{z}}{2} + f_y(z_0)\frac{dz - d\bar{z}}{2i} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0))}_{=:A}dz + \underbrace{\frac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0))}_{=:B}d\bar{z} . \end{aligned}$$

Für die komplexe Differenzierbarkeit von f nach z in z_0

verlangt man $B = 0$ und erhält

$$df = Adz \quad \longrightarrow \quad f'(z_0) = \frac{df}{dz} = A .$$

$$\begin{aligned} 0 = B &= \frac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0)) \\ &= \frac{1}{2}(u_x(z_0) + iv_x(z_0) + i(u_y(z_0) + iv_y(z_0))) \\ &= \frac{1}{2}(u_x(z_0) - v_y(z_0) + i(v_x(z_0) + u_y(z_0))) . \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich: $u_x(z_0) - v_y(z_0) = 0 = v_x(z_0) + u_y(z_0)$

Eigenschaften holomorpher Funktionen:

a) $f = u + iv$ ist in $z_0 \in D$

genau dann komplex differenzierbar, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$$

gilt und $f = (u, v)^T$ total differenzierbar ist.

b) $f(z_0) = u(z_0) + iv(z_0)$ ist in $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$

genau dann komplex differenzierbar, wenn die

Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen
gelten

$$\begin{pmatrix} u_x(z_0) \\ u_y(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y(z_0) \\ -v_x(z_0) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_x(z_0) \\ v_y(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_y(z_0) \\ u_x(z_0) \end{pmatrix}$$

und $f = (u, v)^T$ total differenzierbar ist.

Aufgabe 13:

Für $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$ berechne man

a) $A := \frac{1}{2} (f_x(z_0) - if_y(z_0))$ und

b) $B := \frac{1}{2} (f_x(z_0) + if_y(z_0))$.

Man vergleiche die Ergebnisse mit den Ableitungen von f nach den unabhängigen Variablen z und \bar{z} , also mit

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Dabei sollen die bekannten Ableitungsregeln aus dem Reellen rein formal übertragen werden.

Lösung

f besitzt folgende Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$f(z_0) = z_0^2 = (x_0 + iy_0)^2 = x_0^2 - y_0^2 + i2x_0y_0 = f(x_0, y_0) \quad \Rightarrow$$

$$f_x(z_0) = f_x(x_0, y_0) = 2x_0 + i2y_0$$

$$f_y(z_0) = f_y(x_0, y_0) = -2y_0 + i2x_0$$

a)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (f_x(z_0) - i f_y(z_0)) \\ &= \frac{1}{2} (2x_0 + i2y_0 - i(-2y_0 + i2x_0)) \\ &= 2x_0 + i2y_0 = 2z_0 \end{aligned}$$

Durch Differenzieren erhält man $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 2z_0$.

b)

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} (f_x(z_0) + i f_y(z_0)) \\ &= \frac{1}{2} (2x_0 + i2y_0 + i(-2y_0 + i2x_0)) = 0 \end{aligned}$$

Durch Differenzieren erhält man $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen:

- a) Ist $f(z)$ reellwertig und holomorph auf D ,
dann ist f konstant.

- b) Für holomorphe Funktionen gelten
die bekannten Differentiationsregeln.

- c) Polynome, Potenzreihen, rationale Funktionen,
trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktion
sind im Definitions- bzw. Konvergenzbereich holomorph.

- d) Für holomorphe Funktionen $f = u + iv$ gilt:
 - (i) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u = 0$ und $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0$, d.h.
 u ist eine **harmonische Funktionen** ($\Delta u = 0$)
und $\operatorname{grad} u$ ist quellen- und wirbelfrei.

 - (ii) v ist harmonisch und $\operatorname{grad} v$ ist quellen- und wirbelfrei.

 - (iii) $\operatorname{grad} u$ und $\operatorname{grad} v$ stehen senkrecht aufeinander.

e) Für das C^1 -Vektorfeld $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ gelte im \mathbb{R}^2

$$\operatorname{rot}(\mathbf{w}) = 0$$

dann ist \mathbf{w} ein Gradientenfeld, d.h. $\mathbf{w} = -\operatorname{grad} u$.

Gilt $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$, dann ist das Orthogonalfeld

$\tilde{\mathbf{w}} = (w_2, -w_1)$ Gradientenfeld, d.h. $\tilde{\mathbf{w}} = \operatorname{grad} v$

und die komplexe Funktion

$$\Phi(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ist holomorph.

Aufgabe 14:

a) (i) Man überprüfe, ob $f(z) = z \cdot \operatorname{Im}(z)$ holomorph ist:

$$f(z) = z \cdot \operatorname{Im}(z) = (x + iy)y = \underbrace{xy}_{=u(x,y)} + i \underbrace{y^2}_{=v(x,y)}$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt, denn

$$u_x = y \neq 2y = v_y, \quad v_x = 0 \neq -x = -u_y.$$

Also ist f nicht holomorph.

(ii) Man überprüfe, ob

$$g(z) = 2z + 2\bar{z} + 4i \cdot \operatorname{Im}(z) - 3i$$

holomorph ist.

Mit $z = x + iy$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} g(z) &= 2z + 2\bar{z} + 4i\operatorname{Im}z - 3i \\ &= 2(x + iy) + 2(x - iy) + 4iy - 3i \\ &= 4x + i(4y - 3) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} g(z) = u(x, y) = 4x, \quad \operatorname{Im} g(z) = v(x, y) = 4y - 3$$

sind stetig partiell differenzierbar.

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind erfüllt

$$u_x = 4 = v_y, \quad v_x = 0 = -u_y$$

Also ist g holomorph.

(iii) Man überprüfe, ob

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2$$

harmonisch ist.

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= (x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2)_{xx} \\ &\quad + (x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2)_{yy} \\ &= 6x - 6 - 6x = -6\end{aligned}$$

Damit ist u nicht harmonisch.

b) Man zeige, dass folgende Funktion harmonisch ist

$$u(x, y) = 4x^2 - 4y^2 - 12x + 9.$$

$$\begin{aligned}\Delta u &= (4x^2 - 4y^2 - 12x + 9)_{xx} \\ &\quad + (4x^2 - 4y^2 - 12x + 9)_{yy} \\ &= 8 - 8 = 0\end{aligned}$$

Konstruktion einer zu u

konjugiert harmonische Funktion v

über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$v_y = u_x = 8x - 12 \quad \Rightarrow \quad v = 8xy - 12y + c(x)$$

$$v_x = 8y + c'(x) = -u_y = -(-8y)$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = c \in \mathbb{R}$$

$$u(x, y) = 4x^2 - 4y^2 - 12x + 9,$$

$$v(x, y) = 8xy - 12y + c$$

sind stetig partiell differenzierbar.

Damit ist $f = u + iv$ holomorph in \mathbb{C} und

v eine (die) konjugiert harmonische Funktion zu u .

Bemerkung:

Für $f(z) = (2z - 3)^2$ und $c = 0$ ergibt sich

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(2z - 3)^2 = 4x^2 - 4y^2 - 12x + 9 \quad \text{und}$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im}(2z - 3)^2 = 8xy - 12y.$$

konforme Abbildungen

Ist $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph im Gebiet D

mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$,

dann wird f **konform** genannt.

Eigenschaften

- a) Schneiden sich im Punkt z_0 zwei Kurve c_1 und c_2 ,
so bleiben unter $w = f(z)$ Schnittwinkel erhalten,
d.h., mit $z_0 = c_1(t_1) = c_2(t_2)$ und $d_i(t) := f(c_i(t))$ gilt:

$$\gamma = \angle(\dot{c}_2(t_2), \dot{c}_1(t_1)) = \arg \dot{c}_2(t_2) - \arg \dot{c}_1(t_1)$$

$$\Rightarrow \gamma = \angle(\dot{d}_2(t_2), \dot{d}_1(t_1)) .$$

Diese Eigenschaft wird als **winkeltreu** bezeichnet.

- b) Für alle von z_0 ausgehende Richtungen
gibt $|f'(z_0)|$ den gemeinsamen Verzerrungsfaktor an,
denn es gilt die Kettenregel:

$$\dot{d}(t) = f'(c(t)) \cdot \dot{c}(t) .$$

Insbesondere bleiben lokal die Längenverhältnisse erhalten.

Aufgabe 15:

Gegeben seien für $-\pi < t < \pi$ die Kurven

$$c_1(t) = t \quad \text{für } t > 0 \text{ und}$$

$$c_2(t) = 4e^{it} \quad \text{für } -\pi < t < \pi .$$

- a) Man skizziere die Kurven c_1 und c_2 in der z -Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.

$c_1(t)$: positive reelle Achse

$c_2(t)$: Kreis vom Radius $r = 4$ ohne den Punkt $z = -4$.

Schnittpunkt z_s : $c_1(4) = 4 = z_s = c_2(0)$

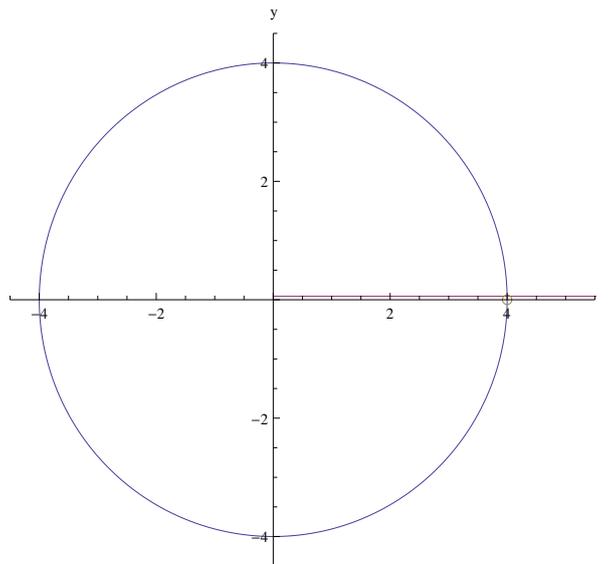


Bild 15 a): $c_1(t)$, $c_2(t)$ mit $z_s = 4$

Ableitungen der Kurven in den Schnittpunkten:

$$\dot{c}_1(t) = 1 \Rightarrow \dot{c}_1(4) = 1 = 1e^{i \cdot 0}$$

$$\dot{c}_2(t) = 4ie^{it} \Rightarrow \dot{c}_2(0) = 4i = 4e^{i\pi/2}$$

Schnittwinkel:

$$\gamma = \angle(\dot{c}_2(0), \dot{c}_1(4))$$

$$= \arg \dot{c}_2(0) - \arg \dot{c}_1(4)$$

$$= \arg(4i) - \arg 1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

- b) In welche Bildkurven der w -Ebene gehen c_1 und c_2 unter dem Hauptwert von $w = \sqrt{z}$ über?

Hauptwert der Wurzelfunktion

$$w = \sqrt{z} := \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \quad \text{mit} \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

Für die Bildkurven erhält man:

$$d_1(t) := \sqrt{c_1(t)} = \sqrt{t} \quad \text{mit } t > 0: \quad \text{positive reelle Achse}$$

$$d_2(t) := \sqrt{c_2(t)} = 2e^{it/2} \quad \text{für } -\pi < t < \pi:$$

Halbkreis vom Radius $r = 2$ in der rechten Halbebene (ohne die Punkte $w = \pm 2i$).

Schnittpunkt: $d_1(4) = w_s = \sqrt{z_s} = 2 = d_2(0)$

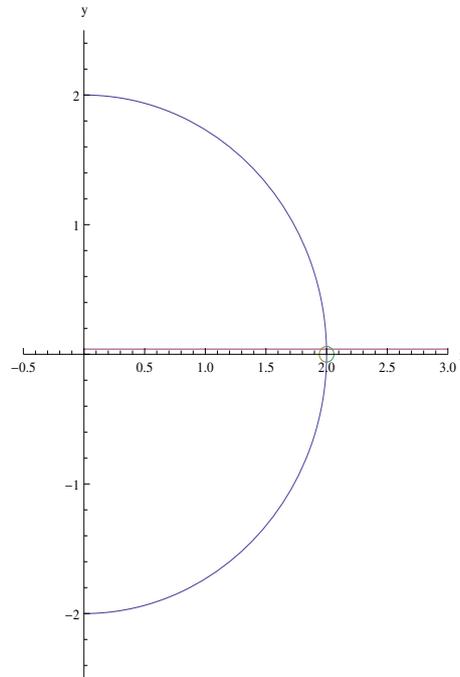


Bild 15 b): $d_1(t)$, $d_2(t)$ und $w_s = 2$

Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

Ableitungen der Bildkurven in den Schnittpunkten:

$$\dot{d}_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow \dot{d}_1(4) = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^{i \cdot 0},$$

$$\dot{d}_2(t) = ie^{it/2} \Rightarrow \dot{d}_2(0) = i = e^{i\pi/2}$$

Schnittwinkel:

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= \angle \left(\dot{d}_2(0), \dot{d}_1(4) \right) \\ &= \arg \dot{d}_2(0) - \arg \dot{d}_1(4) \\ &= \arg(i) - \arg 1/4 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \text{ lokales}\end{aligned}$$

Längenverhältnis:

$$\frac{|\dot{c}_2(0)|}{|\dot{c}_1(4)|} = \frac{|4i|}{|1|} = 4 = \frac{|i|}{|1/4|} = \frac{|\dot{d}_2(0)|}{|\dot{d}_1(4)|}$$

Bemerkung:

Der Streckungsfaktor $f'(c(t))$, der in

$$\dot{d}(t) = \frac{d}{dt} (f(c(t))) = f'(c(t))\dot{c}(t)$$

steckt, kürzt sich im Schnittpunkt heraus.

Der Schnittwinkel und das lokale Längenverhältnis bleiben erhalten, da die Kurven im Holomorphiegebiet von $f(z) = \sqrt{z}$ verlaufen und dort $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \neq 0$ gilt, f ist also konform.

Aufgabe 16:

a) Man skizziere die beiden Kreise

$$K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$$

und

$$K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$$

und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2 , die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

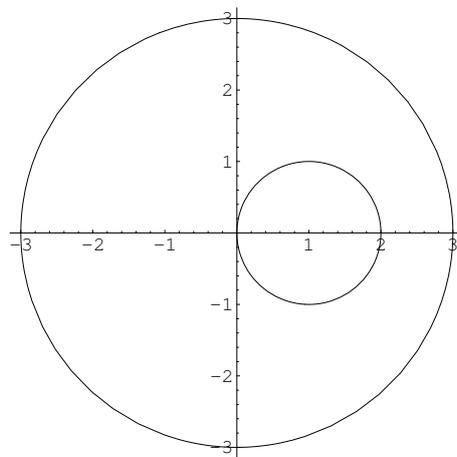


Bild 16 a): Kreise K_1 und K_2

Symmetrie zu $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ liefert die Bedingung

$$z_1 \bar{z}_2 = 3^2 \Rightarrow \bar{z}_2 = \frac{9}{z_1}$$

Symmetrie zu $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$ ergibt damit

$$1^2 = 1 = (z_1 - 1)(\bar{z}_2 - 1) = (z_1 - 1) \left(\frac{9}{z_1} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow z_1^2 - 9z_1 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow z_2 = \frac{9}{\bar{z}_1} = \frac{9 \mp 3\sqrt{5}}{2}$$

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

Für $T(z) = k \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$ und $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$w_1 = T(z_1) = 0, \quad w_2 = T(z_2) = \infty.$$

T ist eine Möbius-Transformation, denn

$$ad - bc = k(z_1 - z_2) \neq 0.$$

T ist holomorph für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_2\}$ und deshalb auch konform in diesem Gebiet, denn es gilt

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(z - z_2)^2} \neq 0.$$

- c) Man skizziere das Bild von K_1 und K_2 unter T , wenn noch $T(0) = 1$ gilt.

z_1 und z_2 liegen symmetrisch zu K_1 und K_2 .

Also liegen $w_1 = 0$ und $w_2 = \infty$ symmetrisch zu den Bildkreisen $T(K_1)$ und $T(K_2)$.

Da z_2 nicht auf $K_{1,2}$ liegt, liegt $w_2 = \infty$ nicht auf den Bildkreisen.

Damit sind $T(K_1)$ und $T(K_2)$ Kreise um den Ursprung.

$z_3 = 0$ liegt auf K_1 und $T(0) = 1$ auf dem Bildkreis, also wird K_1 auf den Einheitskreis abgebildet.

$$1 = T(0) = k \cdot \frac{0 - z_1}{0 - z_2} = k \cdot \frac{z_1}{z_2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{z_2}{z_1}$$

$$\Rightarrow \quad T(z) = \frac{z_2(z - z_1)}{z_1(z - z_2)} = \frac{z_2z - z_2z_1}{z_1z - z_1z_2} = \frac{z_2z - 9}{z_1z - 9}$$

Radius R von $T(K_2)$:

$$z_4 = 3 \text{ liegt auf } K_2 \quad \Rightarrow \quad R = |T(3)|.$$

Konkret ergibt sich für $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

$$R = \left| \frac{3 \cdot \frac{9+3\sqrt{5}}{2} - 9}{3 \cdot \frac{9-3\sqrt{5}}{2} - 9} \right| = \left| \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \right| \approx 2.618$$

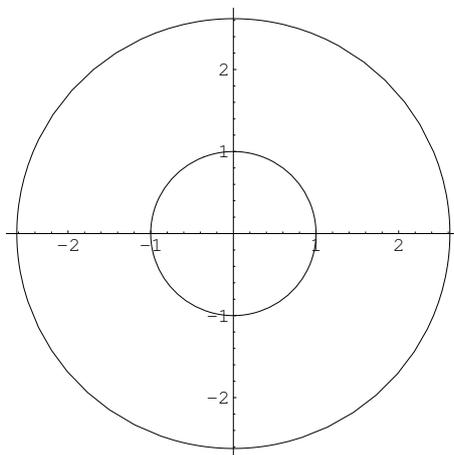


Bild 16 c): Kreise $T(K_1)$ und $T(K_2)$ mit $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

Da z_1 im Inneren von K_1 liegt, wird das beschränkte zwischen den beiden Kreisen liegende Gebiet abgebildet auf den Kreisring

$$\{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < R = 2.618\}.$$

Im umgekehrten Fall, d.h. $z_1 = \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \approx 7.85$, erhält man den Kreisring

$$\{w \in \mathbb{C} \mid R = 0.38 < |w| < 1\}.$$

Konforme Gebietsverpflanzung bei Problemen der Elektrostatik

Gegeben sei eine C^2 -Funktion $\Phi : D \rightarrow \mathbb{C}$, die im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ der **'physikalischen Ebene'** die Lösung eines Problems angibt, beispielsweise beschrieben durch:

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{mit Randbedingungen} \quad \Phi|_{\partial D} = \Phi_0 . \quad (P)$$

Da (P) in D in der Regel schwer zu lösen ist, wird es durch eine konforme Transformation $f : D \rightarrow W$ **verpflanzt** in das einfachere Gebiet $W \subset \mathbb{C}$ der **Modellebene**, durch

$$\Psi : W \rightarrow D \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \Psi := \Phi \circ f^{-1} .$$

Man löst dann das Ersatzproblem (P') in der Modellebene:

$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{mit Randbedingungen} \quad \Psi|_{\partial W} = \Psi_0 . \quad (P')$$

Gerechtfertigt wird das Lösen von $\Delta\Psi = 0$
durch den **konformen Verpflanzungssatz**

$$\Delta\Phi = \Delta\Psi \cdot |f'(z)|^2,$$

denn wegen $|f'(z)|^2 \neq 0$ (f konform) gilt damit:

$$\Delta\Phi = 0 \Leftrightarrow \Delta\Psi = 0.$$

Anschließend transformiert man
das durch Ψ gelöste Problem (P') zurück und
erhält die Lösung Φ des Ausgangsproblems (P).

In **Kreisgebieten** W vereinfacht sich
das Lösen eines Modellproblems mit

$$\Delta\Psi = 0$$

in der Regel durch Verwenden von **Polarkoordinaten** (r, φ) :

$$(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Die Laplacegleichung besitzt dann die Darstellung

$$\Delta\Psi = \Psi_{rr} + \frac{1}{r}\Psi_r + \frac{1}{r^2}\Psi_{\varphi\varphi} = 0.$$

Aufgabe 17:

Gegeben sei das durch die beiden Kreise

$$K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$$

und

$$K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$$

berandete beschränkte Gebiet D .

Man berechne eine auf D harmonische Funktion, die auf K_1 den Wert 1 und auf K_2 den Wert 2 annimmt.

Hinweis:

Man transformiere das Problem (vgl. Aufgabe 16),

löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten

und transformiere zurück.

Lösung:

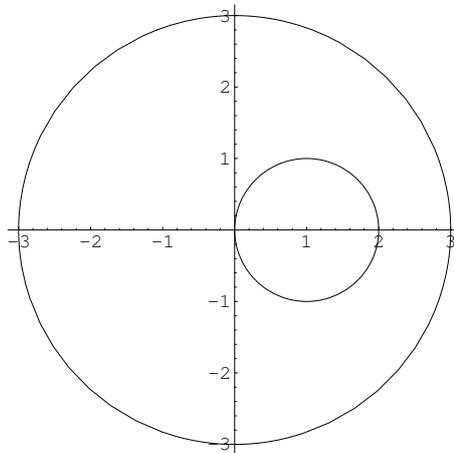


Bild 17 a): Gebiet D

Gesucht ist die reellwertige Funktion $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ für die mit $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 0 & \text{für alle } (x, y)^T \in D \\ u(x, y) &= 2 & \text{für alle } (x, y)^T \in K_2 \\ u(x, y) &= 1 & \text{für alle } (x, y)^T \in K_1.\end{aligned}$$

Das Gebiet D wird jetzt durch die konforme Möbius-Transformation T aus Aufgabe 16 auf einen der Kreisringe,

z.B. $T(D) = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < R = 2.618\}$ abgebildet.

Die konform verpflanzte Funktion lautet mit

$$T(z) = w = \xi + i\eta$$

$$U(\xi, \eta) = U(w) := u(T^{-1}(w)) = u(z).$$

U erfüllt wegen des zweiten konformen Verpflanzungssatzes

$\Delta u = \Delta U \cdot |T'(z)|^2$ und $T'(z) \neq 0$ das Randwertproblem

$$\Delta U(\xi, \eta) = 0 \quad \text{für alle} \quad (\xi, \eta)^T \in T(D)$$

$$U(\xi, \eta) = 2 \quad \text{für alle} \quad (\xi, \eta)^T \in T(K_2)$$

$$U(\xi, \eta) = 1 \quad \text{für alle} \quad (\xi, \eta)^T \in T(K_1).$$

Dieses Problem im Kreisring $T(D)$ wird in Polarkoordinaten gelöst.

Erneute Transformation:

$$\xi = r \cos \varphi, \quad \eta = r \sin \varphi, \quad 1 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Das transformierte Problem in

$$v(r, \varphi) := U(\xi(r, \varphi), \eta(r, \varphi))$$

lautet

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} = 0 \quad \text{für alle} \quad 1 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$v(R, \varphi) = 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$v(1, \varphi) = 1.$$

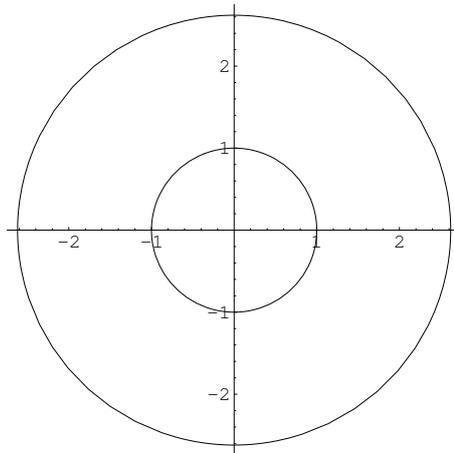


Bild 17 b): $T(D) = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < R = 2.618\}$ mit $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

Gebietssymmetrie und Rotationssymmetrie der Randdaten

führen auf rotationssymmetrischen Lösungsansatz

$$v(r, \varphi) = v(r).$$

Randwertaufgabe mit gewöhnlicher Differentialgleichung

$$\begin{aligned} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r &= 0 \quad \text{für alle } 1 < r < R \\ v(R) &= 2, \\ v(1) &= 1, \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet: $v(r) = c_1 \ln r + c_2$.

Anpassen an die Randdaten liefert

$$1 = v(1) = c_1 \ln 1 + c_2 = c_2$$

$$2 = v(R) = c_1 \ln R + 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1/\ln R.$$

Die gesuchte Lösung in Polarkoordinaten lautet somit

$$v(r, \varphi) = v(r) = \frac{\ln r}{\ln R} + 1.$$

Rücktransformation in die w -Ebene ergibt dort die Lösung

$$U(w) = \frac{\ln |w|}{\ln R} + 1.$$

Rücktransformation in die z -Ebene ergibt dort die Lösung

$$u(z) = \frac{\ln |T(z)|}{\ln R} + 1.$$

Mit (beachte $z_{1,2} \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} |T(z)| &= \left| \frac{z_2 z - 9}{z_1 z - 9} \right| = \left(\frac{z_2 z \bar{z}_2 \bar{z} - 9(z_2 z + \bar{z}_2 \bar{z}) + 81}{z_1 z \bar{z}_1 \bar{z} - 9(z_1 z + \bar{z}_1 \bar{z}) + 81} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{z_2^2 z \bar{z} - 9z_2(z + \bar{z}) + 81}{z_1^2 z \bar{z} - 9z_1(z + \bar{z}) + 81} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{z_2^2(x^2 + y^2) - 18z_2 x + 81}{z_1^2(x^2 + y^2) - 18z_1 x + 81} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

ergibt sich in der (x, y) -Ebene die Lösungsdarstellung

$$u(x, y) = \frac{1}{2 \ln R} \ln \left(\frac{z_2^2(x^2 + y^2) - 18z_2 x + 81}{z_1^2(x^2 + y^2) - 18z_1 x + 81} \right) + 1.$$

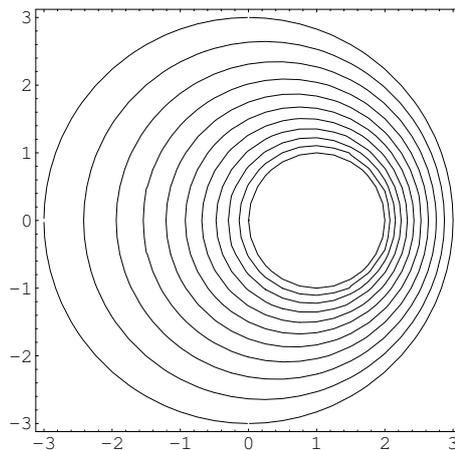


Bild 17 c): Höhenlinien der Lösung $u(x, y)$