**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2023**
Dr. K. Rothe

# Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

# Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 5

## Differentialrechnung im Komplexen:

Eine Abbildung $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, wenn sie in jedem Punkt $z_0$ des Gebietes $D$ **komplex differenzierbar** ist, d.h. es existiert

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

oder entsprechend

$$f(z) = f(z_0) + \underbrace{f'(z_0)(z - z_0)}_{=df} + o(|z - z_0|).$$

Für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$ und $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, die in $u$ und $v$ stetig partiell differenzierbar in einer (offenen) Umgebung von $z_0 = x_0 + iy_0$ sei, wird das komplexe Differential $df$ in $z_0$ erklärt durch

$$df := du + idv \; ,$$

mit den reellen Differentialen $dx = x - x_0$ und $dy = y - y_0$, sowie

$$du = u_x(x_0, y_0)dx + u_y(x_0, y_0)dy \quad \text{und} \quad dv = v_x(x_0, y_0)dx + v_y(x_0, y_0)dy \; .$$

Man erhält damit

$$\begin{aligned} df &= u_x(x_0,y_0)dx + u_y(x_0,y_0)dy + i(v_x(x_0,y_0)dx + v_y(x_0,y_0)dy) \\ &= \underbrace{(u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0))}_{=f_x(z_0)}dx + \underbrace{(u_y(x_0,y_0) + iv_y(x_0,y_0))}_{=f_y(z_0)}dy\,. \end{aligned}$$

Die Differentiale $dx$ und $dy$ werden nun durch Differentiale in $dz = z - z_0 = dx + idy$ und $d\bar{z} = dx - idy$ ersetzt

$$\begin{aligned} df &= f_x(z_0)\frac{dz + d\bar{z}}{2} + f_y(z_0)\frac{dz - d\bar{z}}{2i} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\left(f_x(z_0) - if_y(z_0)\right)}_{=:A} dz + \underbrace{\frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + if_y(z_0)\right)}_{=:B} d\bar{z}\,. \end{aligned}$$

Für die komplexe Differenzierbarkeit von $f$ nach $z$ in $z_0$ verlangt man $B = 0$ und erhält

$$df = Adz \quad \to \quad f'(z_0) = \frac{df}{dz} = A\,.$$

$B = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + if_y(z_0)\right) = \frac{1}{2}\left(u_x(z_0) + iv_x(z_0) + i(u_y(z_0) + iv_y(z_0))\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(u_x(z_0) - v_y(z_0) + i(v_x(z_0) + u_y(z_0))\right)\,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich führt auf $u_x(z_0) - v_y(z_0) = 0 = v_x(z_0) + u_y(z_0)$.

**Eigenschaften holomorpher Funktionen:**

a) $f = u + iv$ ist in $z_0 \in D$ genau dann komplex differenzierbar, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$$

gilt und $f = (u,v)^T$ total differenzierbar ist.

b) $f(z_0) = u(z_0) + iv(z_0)$ ist in $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ genau dann komplex differenzierbar, wenn die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** gelten

$$\begin{pmatrix} u_x(z_0) \\ u_y(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y(z_0) \\ -v_x(z_0) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} v_x(z_0) \\ v_y(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_y(z_0) \\ u_x(z_0) \end{pmatrix}$$

und $f = (u,v)^T$ total differenzierbar ist.

**Aufgabe 13:**

Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$ berechne man

a) $A := \dfrac{1}{2}\,(f_x(z_0) - i f_y(z_0))$ und

b) $B := \dfrac{1}{2}\,(f_x(z_0) + i f_y(z_0))$.

Man vergleiche die Ergebnisse mit den Ableitungen von $f$ nach den unabhängigen Variablen $z$ und $\bar{z}$, also mit

$$\frac{\partial f}{\partial z}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,.$$

Dabei sollen die bekannten Ableitungsregeln aus dem Reellen rein formal übertragen werden.

**Lösung**

$f$ besitzt folgende Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$f(z_0) = z_0^2 = (x_0 + iy_0)^2 = x_0^2 - y_0^2 + i2x_0y_0 = f(x_0, y_0)\,.$$

Man erhält

$$f_x(z_0) = f_x(x_0, y_0) = 2x_0 + i2y_0\,, \quad f_y(z_0) = f_y(x_0, y_0) = -2y_0 + i2x_0$$

a) $A = \dfrac{1}{2}\,(f_x(z_0) - i f_y(z_0)) = \dfrac{1}{2}\,(2x_0 + i2y_0 - i(-2y_0 + i2x_0)) = 2x_0 + i2y_0 = 2z_0$

Durch rein formales Differenzieren wie im Reellen erhält man $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 2z_0\,.$

b) $B = \dfrac{1}{2}\,(f_x(z_0) + i f_y(z_0)) = \dfrac{1}{2}\,(2x_0 + i2y_0 + i(-2y_0 + i2x_0)) = 0$

Durch rein formales Differenzieren wie im Reellen erhält man $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0\,.$

**weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen:**

a) Ist $f(z)$ reellwertig und holomorph auf $D$, dann ist $f$ konstant.

b) Für holomorphe Funktionen gelten die bekannten Differentiationsregeln.

c) Polynome, Potenzreihen, rationale Funktionen, trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktion sind in ihrem Definitions- bzw. Konvergenzbereich holomorph.

d) Für holomorphe Funktionen $f = u + iv$ gilt:

   (i) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u = 0$ und $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0$, d.h. $u$ ist eine **harmonische Funktionen** ($\Delta u = 0$) und $\operatorname{grad} u$ ist quellen- und wirbelfrei.

   (ii) $v$ ist harmonisch und $\operatorname{grad} v$ ist quellen- und wirbelfrei.

   (iii) $\operatorname{grad} u$ und $\operatorname{grad} v$ stehen senkrecht aufeinander.

e) Für das $C^1$-Vektorfeld $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$ gelte $\operatorname{rot}(\boldsymbol{w}) = 0$ im $\mathbb{R}^2$, dann ist $\boldsymbol{w}$ ein Gradientenfeld, d.h. $\boldsymbol{w} = -\operatorname{grad} u$.

   Gilt $\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0$, dann ist das Orthogonalfeld $\tilde{\boldsymbol{w}} = (w_2, -w_1)$ Gradientenfeld, d.h. $\tilde{\boldsymbol{w}} = \operatorname{grad} v$ und die komplexe Funktion

$$\Phi(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

   ist holomorph.

**Aufgabe 14:**

a) Man überprüfe, ob

(i) $f(z) = z \cdot \mathrm{Im}(z)$ holomorph ist,

(ii) $g(z) = 2z + 2\bar{z} + 4i \cdot \mathrm{Im}(z) - 3i$ holomorph ist,

(iii) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2$ harmonisch ist.

b) Man zeige, dass

$$u(x,y) = 4x^2 - 4y^2 - 12x + 9$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu $u$ konjugiert harmonische Funktion $v(x,y)$, d.h. eine Funktion $v$, für die die Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

**Lösung:**

a) (i) $f(z) = z \cdot \mathrm{Im}(z) = (x+iy)y = \underbrace{xy}_{=u(x,y)} + i \underbrace{y^2}_{=v(x,y)}$

Wegen $u_x = y \neq 2y = v_y$ sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nicht erfüllt und $f$ ist nicht holomorph.

(ii) Mit $z = x + iy$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} g(z) &= 2z + 2\bar{z} + 4i\mathrm{Im}z - 3i \\ &= 2(x+iy) + 2(x-iy) + 4iy - 3i \;=\; 4x + i(4y-3) \end{aligned}$$

Da Re $g(z) = 4x =: u(x,y)$ und
Im $g(z) = 4y - 3 =: v(x,y)$ stetig partiell differenzierbar sind und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen

$$u_x = 4 = v_y\,, \quad v_x = 0 = -u_y$$

ist $g$ holomorph.

(iii)
$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= (x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2)_{xx} + (x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x^2)_{yy} \\ &= 6x - 6 - 6x = -6 \end{aligned}$$

Damit ist $u$ nicht harmonisch.

b) $\Delta u \;=\; (4x^2 - 4y^2 - 12x + 9)_{xx} + (4x^2 - 4y^2 - 12x + 9)_{yy} = 8 - 8 = 0$

Damit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorph in $\mathbb{C}$ ist, müssen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sein:

$$v_y = u_x = 8x - 12 \quad \Rightarrow \quad v = 8xy - 12y + c(x)$$

$$v_x = 8y + c'(x) = -u_y = -(-8y)$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = c \in \mathbb{R}$$

Da $v(x,y) = 8xy - 12y + c$ (und auch $u$) stetig partiell differenzierbar ist, ist $f$ holomorph in $\mathbb{C}$ und $v$ eine (die) konjugiert harmonische Funktion zu $u$.

*Bemerkung:*

Für $f(z) = (2z-3)^2$ und $c = 0$ ergibt sich $u(x,y) = \mathrm{Re}f$ und $v(x,y) = \mathrm{Im}f$.

## konforme Abbildungen

Ist $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph im Gebiet $D$ mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, dann wird $f$ **konform** genannt.

### Eigenschaften

a) Schneiden sich im Punkt $z_0$ zwei Kurve $c_1$ und $c_2$, so bleiben unter $w = f(z)$ Schnittwinkel erhalten, d.h., mit $z_0 = c_1(t_1) = c_2(t_2)$ und $d_i(t) := f(c_i(t))$ gilt:

$$\gamma = \angle(\dot{c}_2(t_2), \dot{c}_1(t_1)) = \arg \dot{c}_2(t_2) - \arg \dot{c}_1(t_1) \;\Rightarrow\; \gamma = \angle(\dot{d}_2(t_2), \dot{d}_1(t_1)) \,.$$

Diese Eigenschaft wird als **winkeltreu** bezeichnet.

b) Für alle von $z_0$ ausgehende Richtungen gibt $|f'(z_0)|$ den gemeinsamen Verzerrungsfaktor an, denn es gilt die Kettenregel:

$$\dot{d}(t) = f'(c(t)) \cdot \dot{c}(t) \,.$$

Insbesondere bleiben lokal die Längenverhältnisse erhalten.

### Aufgabe 15:

Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = t$ für $t > 0$ und $c_2(t) = 4e^{it}$ für $-\pi < t < \pi$.

a) Man skizziere die Kurven $c_1$ und $c_2$ in der $z$-Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.

b) In welche Bildkurven der $w$-Ebene gehen $c_1$ und $c_2$ unter dem Hauptwert von $w = \sqrt{z}$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

### Lösung:

Der Hauptwert der Wurzelfunktion für $z = re^{i\varphi}$ ist festgelegt durch

$$w = \sqrt{z} := \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \quad \text{mit} \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

a) $c_1(t) = t$ für $t > 0$: positive reelle Achse

$c_2(t) = 4e^{it}$ für $-\pi < t < \pi$:

Kreis vom Radius $r = 4$ ohne den Punkt $z = -4$.

Schnittpunkt $z_s$ von $c_1$ und $c_2$: $\quad c_1(4) = 4 = z_s = c_2\,(0)$

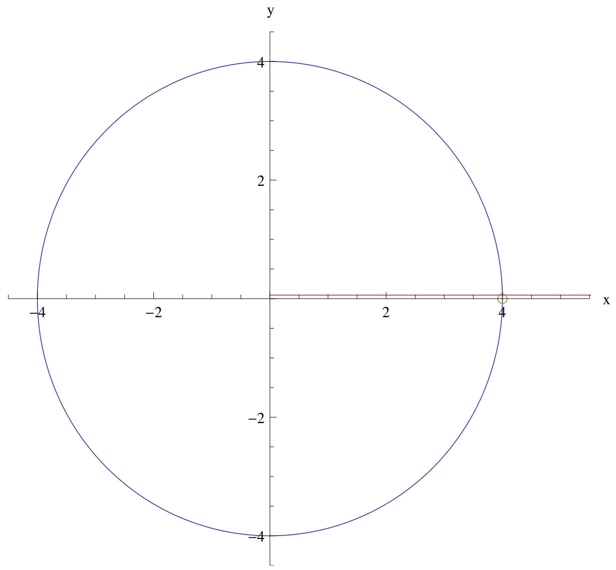


**Bild 15 a):** $c_1(t)$, $c_2(t)$ und Schnittpunkt $z_s = 4$ in der $z$-Ebene

Ableitungen der Kurven in den Schnittpunkten:

$\dot{c}_1(t) = 1 \Rightarrow \dot{c}_1(4) = 1 = 1e^{i\cdot 0}$ und

$\dot{c}_2(t) = 4ie^{it} \Rightarrow \dot{c}_2(0) = 4i = 4e^{i\pi/2}$

Schnittwinkel:

$$\gamma = \angle\left(\dot{c}_2(0), \dot{c}_1(4)\right) = \arg \dot{c}_2(0) - \arg \dot{c}_1(4)$$
$$= \arg(4i) - \arg 1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

b) Für die Bildkurven erhält man:

$d_1(t) := \sqrt{c_1(t)} = \sqrt{t}$ mit $t > 0$: positive reelle Achse

$d_2(t) := \sqrt{c_2(t)} = 2e^{it/2}$ für $-\pi < t < \pi$:

Halbkreis vom Radius $r = 2$ in der rechten Halbebene (ohne die Punkte $w = \pm 2i$).

Schnittpunkt: $d_1(4) = 2 = d_2(0)$

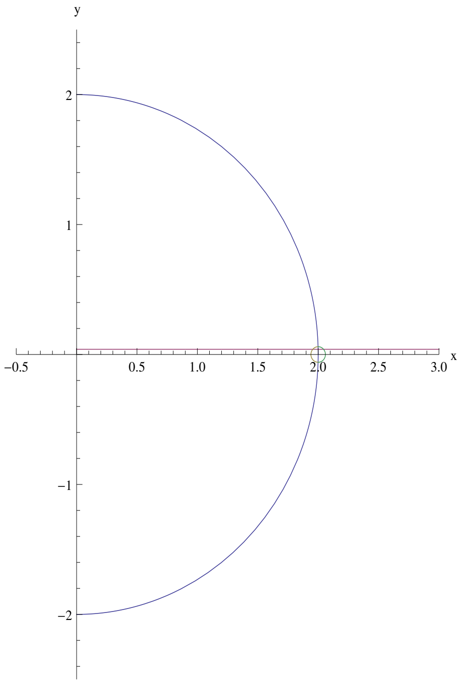


**Bild 15 b):** $d_1(t)$, $d_2(t)$ und Schnittpunkt $w_s = \sqrt{z_s} = 2$ in der $w$-Ebene

Ableitungen der Bildkurven in den Schnittpunkten:

$\dot{d}_1(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \;\Rightarrow\; \dot{d}_1(4) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}e^{i\cdot 0}$ und

$\dot{d}_2(t) = ie^{it/2} \;\Rightarrow\; \dot{d}_2\,(0) = i = e^{i\pi/2}$

Schnittwinkel:

$\tilde{\gamma} = \angle\left(\dot{d}_2\,(0)\,, \dot{d}_1(4)\right) = \arg \dot{d}_2\,(0) - \arg \dot{d}_1(4)$

$= \arg(i) - \arg 1/4 = \dfrac{\pi}{2} - 0 = \dfrac{\pi}{2}$

lokales Längenverhältnis: $\dfrac{|\dot{c}_2\,(0)\,|}{|\dot{c}_1(4)|} = \dfrac{|4i|}{|1|} = 4 = \dfrac{|i|}{|1/4|} = \dfrac{|\dot{d}_2\,(0)\,|}{|\dot{d}_1(4)|}$

Bemerkung:

Der Streckungsfaktor $f'(c(t))$, der in

$$\dot{d}(t) = \frac{d}{dt}\left(f(c(t))\right) = f'(c(t))\dot{c}(t)$$

steckt, kürzt sich im Schnittpunkt heraus.

Der Schnittwinkel und das lokale Längenverhältnis bleiben erhalten, da die Kurven im Holomorphiegebiet von $\sqrt{z}$ verlaufen und dort $f'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{z}} \neq 0$ gilt.

**Aufgabe 16:**

a) Man skizziere die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und berechne die beiden Punkte $z_1$ und $z_2$, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von $K_1$ und $K_2$ unter $T$, wenn noch $T(0) = 1$ gilt.

**Lösung:**

a)

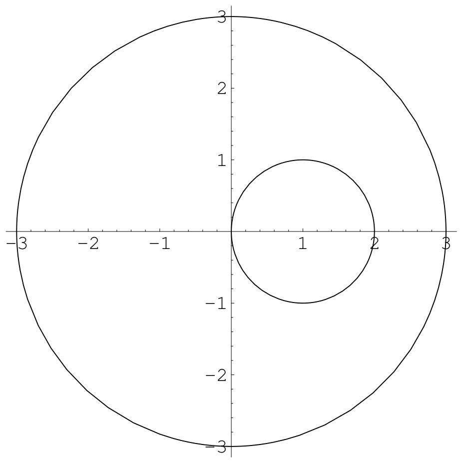


**Bild 16 a):** Kreise $K_1$ und $K_2$

Symmetrie zu $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und
$K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ liefert die Bedingungen

$$\begin{aligned}
z_1\bar{z}_2 &= 3^2 \Rightarrow \bar{z}_2 = \frac{9}{z_1} \\
(z_1 - 1)(\bar{z}_2 - 1) &= 1^2 \Rightarrow (z_1 - 1)\left(\frac{9}{z_1} - 1\right) = 1 \\
\Rightarrow z_1^2 - 9z_1 + 9 &= 0 \\
\Rightarrow z_1 &= \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow z_2 = \frac{9}{\bar{z}_1} = \frac{9 \mp 3\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

b) Mit $T(z) = k \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$ und $k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt $w_1 = T(z_1) = 0$ und $w_2 = T(z_2) = \infty$.

$T$ ist eine Möbius-Transformation wegen $k \neq 0$,
denn $ad - bc = k(z_1 - z_2) \neq 0$.

$T$ ist holomorph für $z \in \mathbb{C}\backslash\{z_2\}$ und deshalb auch konform in diesem Gebiet, da $T'(z) = \frac{ad - bc}{(z - z_2)^2} \neq 0$ gilt.

c) Da $z_1$ und $z_2$ symmetrisch zu $K_1$ und $K_2$ liegen, liegen auch $w_1 = 0$ und $w_2 = \infty$ symmetrisch zu den Bildkreisen $T(K_1)$ und $T(K_2)$. Da $z_2$ nicht auf $K_{1,2}$ liegt, liegt $w_2 = \infty$ nicht auf den Bilder. Damit müssen $T(K_1)$ und $T(K_2)$ Kreise um den Ursprung sein.

Da $z_3 = 0$ auf $K_1$ liegt, wird $K_1$ wegen $T(0) = 1$ auf den Einheitskreis abgebildet.

Aus $T(0) = 1 = k \cdot \frac{0 - z_1}{0 - z_2} = k \cdot \frac{z_1}{z_2}$ folgt $k = \frac{z_2}{z_1}$ und

$$T(z) = \frac{z_2(z - z_1)}{z_1(z - z_2)} = \frac{z_2 z - z_2 z_1}{z_1 z - z_1 z_2} = \frac{z_2 z - 9}{z_1 z - 9}$$

Der Radius $R$ von $T(K_2)$ kann, da $z_4 = 3$ auf $K_2$ liegt, durch $R = |T(3)|$ bestimmt werden.

Konkret ergibt sich für $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

$$R = \left|\frac{3 \cdot \frac{9+3\sqrt{5}}{2} - 9}{3 \cdot \frac{9-3\sqrt{5}}{2} - 9}\right| = \left|\frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}\right| \approx 2.618$$

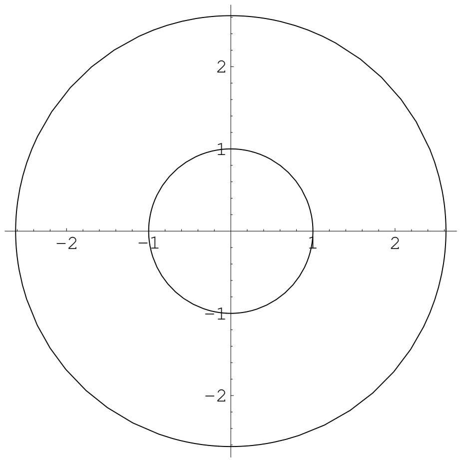


**Bild 16 c):** Kreise $T(K_1)$ und $T(K_2)$ mit $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

Da $z_1$ im Inneren von $K_1$ liegt, wird das beschränkte zwischen den beiden Kreisen liegende Gebiet abgebildet auf den Kreisring

$$\{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < R = 2.618\}.$$

Im umgekehrten Fall, d.h. $z_1 = \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \approx 7.85$, erhält man den Kreisring

$$\{w \in \mathbb{C} \mid R = 0.38 < |w| < 1\}.$$

# Konforme Gebietsverpflanzung bei Problemen der Elektrostatik

Gegeben sei eine $C^2$-Funktion $\Phi : D \to \mathbb{C}$, die im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ der **'physikalischen Ebene'** die Lösung eines Problems angibt, beispielsweise beschrieben durch:

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{mit Randbedingungen} \quad \Phi|_{\partial D} = \Phi_0 \,. \qquad (P)$$

Da $(P)$ in $D$ in der Regel schwer zu lösen ist, wird es durch eine konforme Transformation $f : D \to W$ **verpflanzt** in das einfachere Gebiet $W \subset \mathbb{C}$ der **Modellebene**, durch

$$\Psi : W \to D \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \Psi := \Phi \circ f^{-1} \,.$$

Man löst dann das Ersatzproblem $(P')$ in der Modellebene:

$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{mit Randbedingungen} \quad \Psi|_{\partial W} = \Psi_0 \,. \qquad (P')$$

Gerechtfertigt wird das Lösen von $\Delta\Psi = 0$ durch den **konformen Verpflanzungssatz**

$$\Delta\Phi = \Delta\Psi \cdot |f'(z)|^2 \,,$$

denn wegen $|f'(z)|^2 \neq 0$ ($f$ konform) gilt damit: $\Delta\Phi = 0 \;\Leftrightarrow\; \Delta\Psi = 0$.

Anschließend transformiert man das durch $\Psi$ gelöste Problem $(P')$ zurück und erhält die Lösung $\Phi$ des Ausgangsproblems $(P)$.

In Kreisgebieten $W$ vereinfacht sich das Lösen eines Modellproblems mit $\Delta\Psi = 0$ in der Regel durch Verwenden von **Polarkoordinaten** $(r, \varphi)$:

$$(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \,.$$

Die Laplacegleichung besitzt dann die Darstellung

$$\Delta\Psi = \Psi_{rr} + \frac{1}{r}\Psi_r + \frac{1}{r^2}\Psi_{\varphi\varphi} = 0 \,.$$

**Aufgabe 17:**

Gegeben sei das durch die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ berandete beschränkte Gebiet $D$.

Man berechne eine auf $D$ harmonische Funktion, die auf $K_1$ den Wert 1 und auf $K_2$ den Wert 2 annimmt.

*Hinweis:* Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 16 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

**Lösung:**

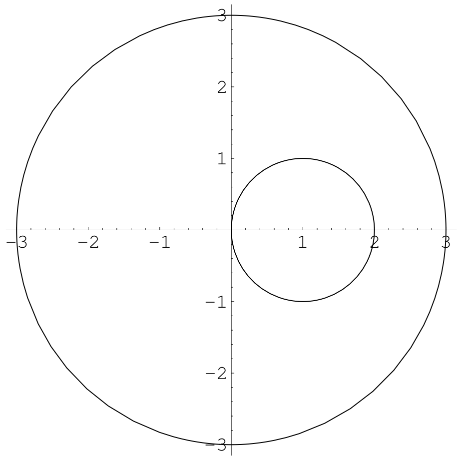


**Bild 17 a):** Gebiet $D$

Gesucht ist die reellwertige Funktion $u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für die mit $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in D \\ u(x,y) &= 2 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in K_2 \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in K_1 \,. \end{aligned}$$

Das Gebiet $D$ wird jetzt durch die konforme Möbius-Transformation $T$ aus Aufgabe 16 auf einen der Kreisringe, z.B. $T(D) = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < R = 2.618\}$ abgebildet.

Die konform verpflanzte Funktion lautet mit $T(z) = w = \xi + i\eta$

$$U(\xi,\eta) = U(w) := u(T^{-1}(w)) = u(z)$$

und erfüllt wegen des zweiten konformen Verpflanzungssatzes:

$\Delta u = \Delta U \cdot |T'(z)|^2$ und $T'(z) \neq 0$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta U(\xi,\eta) &= 0 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T(D) \\ U(\xi,\eta) &= 2 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T(K_2) \\ U(\xi,\eta) &= 1 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T(K_1) \,. \end{aligned}$$

Dieses Problem im Kreisring $T(D)$ lässt sich besser in Polarkoordinaten lösen, deshalb wird erneut mit $\xi = r\cos\varphi$ , $\eta = r\sin\varphi$ ,
$1 \le r \le R$ , $0 \le \varphi < 2\pi$ und $v(r,\varphi) := U(\xi(r,\varphi),\eta(r,\varphi))$ transformiert und das Problem lautet jetzt

$$\begin{aligned} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{für alle} \quad 1 \le r \le R\,, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \\ v(R,\varphi) &= 2\,, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \\ v(1,\varphi) &= 1\,. \end{aligned}$$

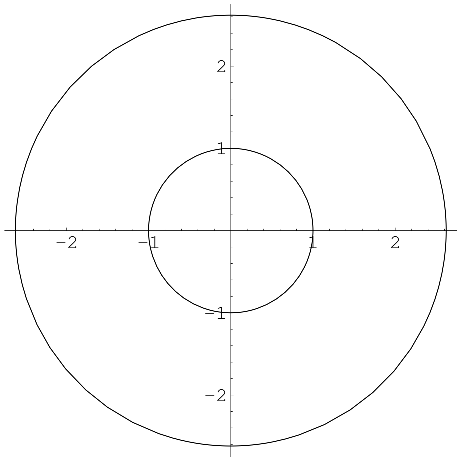


**Bild 17 b):** $T(D) = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < R = 2.618\}$ mit $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

Auf Grund der Gebietssymmetrie und der Rotationssymmetrie der Randdaten liegt die Vermutung nahe, dass dieses Problem eine rotationssymmetrische Lösung besitzt, d.h. $v(r,\varphi) = v(r)$. Das Problem vereinfacht sich so zu einer Randwertaufgabe mit gewöhnlicher Differentialgleichung

$$\begin{aligned} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r &= 0 \quad \text{für alle} \quad 1 < r < R \\ v(R) &= 2\,, \\ v(1) &= 1\,, \end{aligned}$$

deren allgemeine Lösung lautet $v(r) = c_1 \ln r + c_2$.

Anpassen an die Randdaten liefert

$1 = v(1) = c_1 \ln 1 + c_2 = c_2$ und $2 = v(R) = c_1 \ln R + 1$
$\Rightarrow\; c_1 = 1/\ln R$.

Die gesuchte Lösung in Polarkoordinaten lautet somit

$$v(r,\varphi) = v(r) = \frac{\ln r}{\ln R} + 1.$$

Rücktransformation in die $w-$Ebene ergibt dort die Lösung

$$U(w) = \frac{\ln|w|}{\ln R} + 1.$$

Rücktransformation in die $z-$Ebene ergibt dort die Lösung

$$u(z) = \frac{\ln|T(z)|}{\ln R} + 1.$$

Mit (beachte $z_{1,2} \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} |T(z)| &= \left|\frac{z_2 z - 9}{z_1 z - 9}\right| = \left(\frac{z_2 z \bar{z}_2 \bar{z} - 9(z_2 z + \bar{z}_2 \bar{z}) + 81}{z_1 z \bar{z}_1 \bar{z} - 9(z_1 z + \bar{z}_1 \bar{z}) + 81}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{z_2^2 z\bar{z} - 9z_2(z+\bar{z}) + 81}{z_1^2 z\bar{z} - 9z_1(z+\bar{z}) + 81}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{z_2^2(x^2+y^2) - 18z_2 x + 81}{z_1^2(x^2+y^2) - 18z_1 x + 81}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

ergibt sich in der $(x, y)-$Ebene die Lösungsdarstellung

$$u(x,y) = \frac{1}{2\ln R} \ln\left(\frac{z_2^2(x^2+y^2) - 18z_2 x + 81}{z_1^2(x^2+y^2) - 18z_1 x + 81}\right) + 1\,.$$

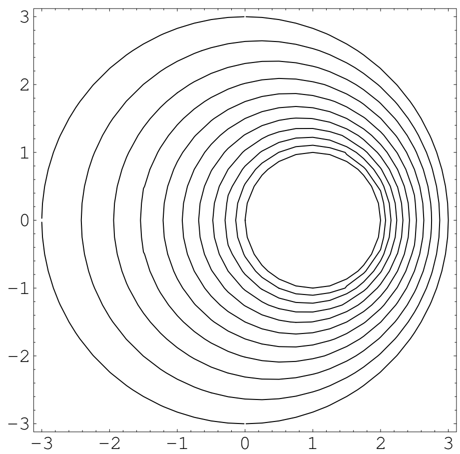


**Bild 17 c)**: Höhenlinien der Lösung $u(x, y)$