Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 4

Möbius-Transformationen:

Eine Abbildung $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ heißt

Möbius-Transformation, wenn gilt

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit} \quad ad - bc \neq 0\,.$$

Aufgabe 9:

Gegeben sei die Inversion

$$w = f(z) := \frac{1}{z}\,, \quad z \neq 0\,.$$

Die Umkehrabbildung der Inversion $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$ lautet

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{w}\,,$$

wobei $z \neq 0$ und $w \neq 0$.

a) Man bestimme das Bild der Geraden $\mathrm{Re}(z) = -1$

$$-1 = \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2w\bar{w} + w + \bar{w} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{1}{4} = w\bar{w} + \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}\bar{w} + \frac{1}{4} \ \Leftrightarrow \ \left(w + \frac{1}{2}\right)\left(\bar{w} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|w + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Bild von $\mathrm{Re}(z) = -1$:

Kreis um $w_0 = -\frac{1}{2}$ mit Radius $r = \frac{1}{2}$.

b) Man bestimme das Bild des Strahls $\operatorname{Im}(z) > 0 \wedge \operatorname{Re}(z) = 0$

$$\operatorname{Im}(z) > 0 \wedge \operatorname{Re}(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = iy \text{ und } y > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad w = \frac{1}{z} = \frac{1}{iy} = -\frac{i}{y}$$

Der Strahl wird auf den Strahl

$$\operatorname{Im}(z) < 0 \wedge \operatorname{Re}(z) = 0$$

abgebildet und umgekehrt durchlaufen.

c) Man bestimme das Bild des Kreises $|z| = 4$

$$4 = |z| = \left|\frac{1}{w}\right| \quad \Leftrightarrow \quad |w| = \frac{1}{4}$$

Der Ursprungskreis vom Radius 4 wird

in den Ursprungskreis vom Radius $\frac{1}{4}$ abgebildet.

d) Man bestimme das Bild des Kreises $|z-1|=1$

$$|z-1|=1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = z\bar{z}-z-\bar{z}+1 = \frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}}-\frac{1}{w}-\frac{1}{\bar{w}}+1$$

$$\Leftrightarrow \quad w+\bar{w}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(w)=\frac{1}{2}$$

Das Bild des Kreises ist die Gerade $\mathrm{Re}(w)=\frac{1}{2}$.

e) Man bestimme das Bild des Kreises $|z-1| = 3$

$$|z-1| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 9 = z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = \frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}} - \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad w\bar{w} + \frac{1}{8}\bar{w} + \frac{1}{8}w + \frac{1}{64} = \frac{1}{64} + \frac{1}{8} = \frac{9}{64}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| w + \frac{1}{8} \right| = \frac{3}{8} \, .$$

Das Bild des Kreises ist

der Kreis um $w_0 = -\frac{1}{8}$ mit Radius $r = \frac{3}{8}$.

Eigenschaften von Möbiustransformationen:

a) Eine Möbius-Transformation ist **bijektiv** auf $\mathbb{C}^*$.

b) Die **Umkehrabbildung** einer Möbius-Transformation ist wieder eine Möbius-Transformation.

c) Ein Möbius-Transformation T ist **kreistreu**, d.h. sie bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab.

Aufgabe 10:

Gegeben sei die Funktion $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$T(z) = \frac{2(1+i)z}{z-1-i}\,.$$

a) Man überprüfe, ob es sich bei T um eine Möbiustransformation handelt.

Ein Vergleich mit der Standardform

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

ergibt

$$ad = 2(1+i)(-1-i) = -4i \neq 0 = 0 \cdot 1 = bc\,,$$

d.h. T ist eine Möbius Transformation.

b) Man berechne alle Fixpunkte von T in kartesischer und Polardarstellung.

$$z = \frac{2(1+i)z}{z-1-i}$$

$$\overset{z \neq 1+i}{\Leftrightarrow} \quad z(z-1-i) = 2(1+i)z$$

$$\Leftrightarrow \quad z(z-3(1+i)) = 0$$

Man erhält also die beiden Fixpunkte

$z_1 = 0 \quad$ und $\quad z_2 = 3(1+i) = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

c) Man bestimme das Bild der Winkelhalbierenden
$\text{Re } z = \text{Im } z$.

Die Punkte z_1, z_2 und $z_3 = 1 + i$ liegen auf der Winkelhalbierenden, also einer Geraden.

Daher liegen sie im Bild unter T auf einer Geraden oder einem Kreis.

Da z_1 und z_2 Fixpunkte sind und $T(1 + i) = \infty$ gilt, wird die Winkelhalbierende auf sich selbst abgebildet.

d) Worauf wird die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden abgebildet?

$z = i$ liegt oberhalb der Winkelhalbierenden

$T(i) = 2 - 2i$ liegt unterhalb der Winkelhalbierenden

Weil T stetig ist, wird wegen Teil c)
die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden auf
die unterhalb der Winkelhalbierenden liegende Ebene abgebildet.

e) Man berechne die Umkehrabbildung von T.

Durch Auflösen von $\quad w = \dfrac{2(1+i)z}{z-1-i}$

nach z erhält man die Umkehrabbildung:

$$w = \frac{2(1+i)z}{z-1-i}$$

$$\overset{z\neq 1+i}{\Leftrightarrow} \quad w(z-1-i) = 2(1+i)z$$

$$\Leftrightarrow \quad z(w-2(1+i)) = (1+i)w$$

$$\overset{z\neq 2(1+i)}{\Leftrightarrow} \quad z = T^{-1}(w) = \frac{(1+i)w}{w-2(1+i)}$$

Dreipunkteformel und Doppelverhältnis

a) Sind zwei Tripel z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3
jeweils paarweise verschiedener Zahlen aus $\mathbb{C}$ gegeben,

dann gibt es **genau** eine Möbius-Transformation,
für die $w_j = T(z_j)$ mit $j = 1, 2, 3$ gilt.

Diese lässt sich berechnen, durch Auflösen der folgenden **Dreipunkteformel** nach w:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\,.$$

b) Der Term

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) := \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

wird als **Doppelverhältnis** der vier verschiedenen Punkte $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ bezeichnet.

c) Unter einer Möbius-Transformation T ist das Doppelverhältnis invariant, d.h. es gilt:

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) = D(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) .$$

d) Der Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ liegt genau dann auf dem durch die Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ bestimmten verallgemeinerten Kreis K, falls gilt

$$D(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \, .$$

Denn für die Möbius-Transformation T mit $T(z_1) = 0, \; T(z_2) = \infty, \; T(z_3) = 1$ gilt $T(K) = \mathbb{R}$ und

$$D(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) = T(z_0) \, .$$

Aufgabe 11:

a) Man gebe eine Möbius-Transformation T an, mit:

$$T(0) = 0\,, \quad T(-2) = 4 \quad \text{und} \quad T(i-1) = 2+2i\,.$$

Einsetzen in die Dreipunkteformel und Auflösen nach w ergibt:

$$\frac{w-0}{w-4} : \frac{2+2i-0}{2+2i-4} = \frac{z-0}{z+2} : \frac{i-1-0}{i-1+2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{w}{w-4} : \frac{i+1}{i-1} = \frac{z}{z+2} : \frac{i-1}{i+1}$$

$$\Rightarrow \qquad w(z+2) = z(w-4)\underbrace{\frac{(i+1)^2}{(i-1)^2}}_{=-1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad wz + 2w = 4z - wz$$

$$\Leftrightarrow \qquad w = \frac{2z}{z+1} =: T(z).$$

b) Liegen

$$z_0 = -1 - i, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = i - 1$$

auf einem Kreis?

Eine Probe ergibt,
dass $z_0, \ldots, z_3$ auf dem Kreis $|z + 1| = 1$ liegen.

Alternativ und ohne Kenntnis des Kreises kann man auch nachprüfen, dass das Doppelverhältnis reell ist:

$$\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{-1 - i}{-1 - i + 2} : \frac{i - 1}{i - 1 + 2}$$

$$= \frac{(-1 - i)(1 + i)}{(1 - i)(i - 1)} = -1 \in \mathbb{R}$$

c) Man zeichne den Kreis $K: \; |z+1| = 1$ und die Punkte

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = i - 1$$

und $T(K)$ mit $T(z_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

Die Punkte $z_1 = 0, \; z_2 = -2$ und $z_3 = i - 1$
liegen auf dem Kreis K.

Damit liegen die Punkte
$T(z_1) = 0, T(z_2) = 4$ und $T(z_3) = 2 + 2i$
auf dem Bildkreis $T(K)$.

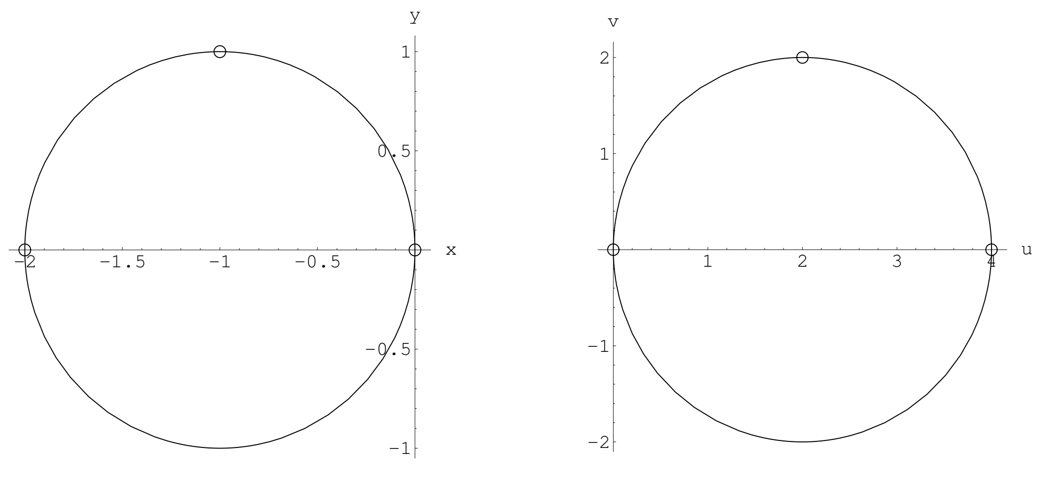


Bild 11: z_1, z_2, z_3 und K $\qquad w_1, w_2, w_3$ und $T(K)$

Kreissymmetrie

Für zwei Punkte z_1 und z_2, die zum Kreis

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$$

mit Radius R und Mittelpunkt z_0 symmetrisch liegen gilt:

a) **Definition:** $(z_1 - z_0)(\bar{z}_2 - \bar{z}_0) = R^2\,.$

b) Ein Punkt z_1 mit $|z_1 - z_0| \leq R$ ist symmetrisch zu genau einem Punkt z_2 mit $|z_2 - z_0| \geq R\,.$

c) Gilt $|z_1 - z_0| = R$ für einen Punkt z_1, so ist er zu sich selbst symmetrisch, d.h. es gilt $z_1 = z_2$.

d) $z_1 = z_0$ ist symmetrisch zu $z_2 = \infty$.

e) Ein Möbius-Transformation **erhält die Symmetrie** zu verallgemeinerten Kreisen.

Aufgabe 12:

Gesucht ist eine Möbius-Transformation $w = T(z)$ mit

$$T(1+i) = -1+i \quad \text{und} \quad T(i) = 0,$$

die die Kreisscheibe $|z-1-i| \leq 1$

auf die Halbebene $\mathrm{Im}(w) \geq \mathrm{Re}(w)$ abbildet.

Lösung:

Lösungsidee: bilde den Kreis

$$K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1-i| = 1\}$$

durch T auf die Winkelhalbierende $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Re}(w)$ ab.

a) $z_2 = i$ liegt auf dem Kreis K und es gilt $T(i) = w_2 = 0$
$\Rightarrow$ Bildkreis $T(K)$ ist ein Kreis durch den Nullpunkt.

b) Der Mittelpunkt $z_1 = 1 + i$ von K
wird auf $w_1 = -1 + i$ abgebildet.

c) Der bezüglich K zu z_1 symmetrische Punkt $z_3 = \infty$
wird auf den zur Winkelhalbierenden symmetrischen Punkt $w_3 = 1 - i$ abgebildet.

Damit wird der Kreis $|z-1-i| = 1$ auf die Winkelhalbierende abgebildet.

Dreipunkteformel zur Berechnung von $w = T(z)$

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}.$$

Man erhält

$$\left.\frac{z - (1+i)}{z - i} : \frac{z_3 - (1+i)}{z_3 - i}\right|_{z_3 \to \infty} = \frac{w - (-1+i)}{w - 0} : \frac{1 - i - (-1+i)}{1 - i - 0}$$

$$\Rightarrow \; \frac{z - 1 - i}{z - i} = \frac{w + 1 - i}{2w}$$

$$\Rightarrow \; w = T(z) = \frac{(1-i)(z-i)}{z - 2 - i}$$

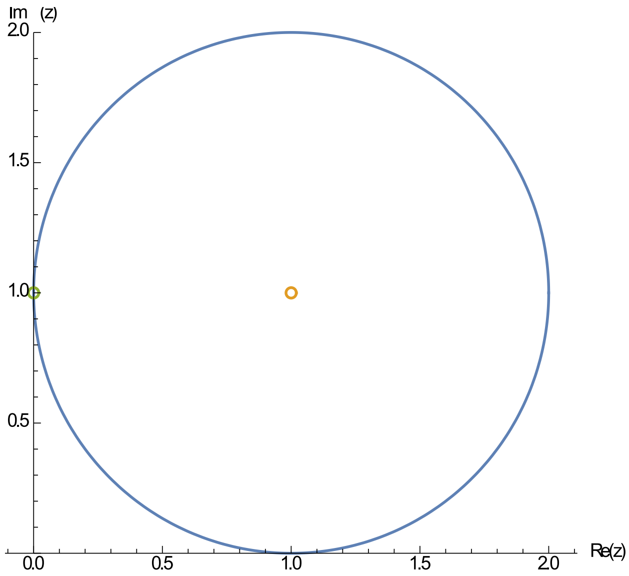
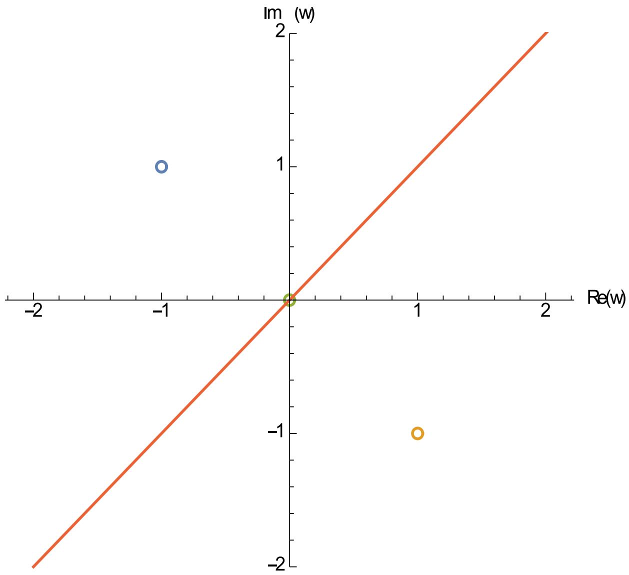


Bild 12: K mit z_1 und z_2



$T(K)$ mit w_1, w_2 und w_3

Da $T(1+i) = -1+i$ folgt auf Grund der Stetigkeit von T, dass die Kreisscheibe $|z-1-i| \leq 1$ auf die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden abgebildet wird.